SEMINAR: „EINFACHE“ HOMOTOPIETHEORIE

PROF. DR. ARTHUR BARTELS, DR. CHRISTOPH WINGES

Die höheren Homotopiegruppen eines Raumes messen in Analogie zur Fundamentalgruppe, inwiefern sich höherdimensionale Sphären (bis auf Homotopie) nichttrivial in einen gegebenen Raum abbilden lassen. Hierbei handelt es sich um algebraische Invarianten, die dazu tendieren, komplizierter als z.B. Homologiegruppen zu sein, dafür im Allgemeinen aber auch mehr/andere Informationen „sehen“. Beispielsweise sind die Homotopiegruppen in der Lage, in einem gewissen Sinne über die Homotopieäquivalenz von CW-Komplexen zu entscheiden. Im ersten Teil des Seminars sollen die Homotopiegruppen und ihre Eigenschaften diskutiert werden. Dies bringt es mit sich, dass wir uns mit fundamentalen Begriffen und Aussagen der klassischen Homotopietheorie beschäftigen werden.

Im zweiten Teil des Seminars wollen wir der Frage nachgehen, inwieweit sich der Begriff der Homotopieäquivalenz von CW-Komplexen auf ein paar einfache, geometrische Modifikationen zurückführen lässt; diese Modifikationen werden im Begriff der *einfachen Homotopieäquivalenz* erfasst. Wie zu befürchten, wird sich herausstellen, dass im Allgemeinen nicht jede Homotopieäquivalenz einfach ist. Der genaue Unterschied wird durch die *Whitehead-Gruppe* gemessen. Diese steht im engen Zusammenhang mit algebraischer $K-$Theorie und spielt ebenfalls eine wichtige Rolle in der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Aus Zeitgründen werden wir es nicht schaffen, fortgeschrittenere Themen der klassischen Homotopietheorie zu behandeln. Zu diesen Auslassungen gehören z.B. die Hindernistheorie und Postnikov-Türme.

Termin: Donnerstags, 8-10 Uhr im SR 7 (M A 701)

1. Grundlagen

1.1. **Höhere Homotopiegruppen (22.10.2015, Plenum).** Definieren Sie die *höheren Homotopiegruppen* $\pi_n(X, x_0)$ eines punktierten Raumes; geben Sie dabei sowohl die Beschreibung mit Hilfe von Kuben als auch mit Hilfe von Sphären. Diskutieren Sie die Gruppenstruktur auf π_n für $n \geqslant 1$ und die Kommutativität der Gruppenstruktur für $n \geqslant 2$. Erläutern Sie die Funktorialität der Homotopiegruppen. Verallgemeinern Sie anschließend die Homotopiegruppen zu den *relativen Homtopiegruppen* eines Paares und beweisen Sie die Existenz der *Paarfolge.* Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung mit Hilfe des Abbildungszylinders Anlass zu einer langen exakten Folge von Homotopiegruppen gibt.

Literatur: [Hat02, Abschnitt 4.1], [Hat02, Seite 2], [Wala, Seite 48ff.].

1.2. **Kofaserungen und der Satz von Whitehead (29.10.2015, Plenum).** Definieren Sie den Begriff *Kofaserung.* Zeigen Sie mit Hilfe des Abbildungszylinders, dass jede stetige Abbildung in eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz faktorisiert werden kann. Zeigen Sie, dass die Inklusion eines Unter-CW-Komplexes eine Kofaserung ist. Formulieren und beweisen Sie den *Satz von Whitehead.* Benutzen Sie ohne Beweis den Satz über zelluläre Approximationen (dieser wird im nächsten Vortrag bewiesen).

Date: WiSe 15/16.

Literatur: [Hat02, Seite 14f.], [Hat02, Satz 4.5], [Wala, Seite 38ff.], [FP90, Theorem 2.5.1]. Falls Sie eine ausführlichere Diskussion der Retraktion $D^{n+1} \to D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ sehen möchten, konsultieren Sie z.B. [FP90, S. 8].

1.3. **Zelluläre Approximation (5.11.2015, Plenum).** Formulieren und beweisen Sie den *zellulären Approximationssatz*. Folgern Sie, dass

- S^n $(n-1)$–zusammenhängend ist.
- das Paar $(X, X^{(n)})$ für jeden CW-Komplex X n–zusammenhängend ist.

Literatur: [Hat02, Satz 4.8], [Hat02, Korollar 4.9] [Hat02, Korollar 4.12] [Wala, Seite 20ff.], [FP90, §2.4].

1.4. **CW-Approximationen und Homotopieausschneidung (12.11.2015, Plenum).** Formulieren und beweisen Sie den Homotopieausschneidungssatz. Folgern Sie den Satz von Freudenthal und berechnen Sie $\pi_n(S^n)$.

Literatur: [Hat02, Satz 4.23]; benutzen Sie Korollar 4.16 ohne Beweis (dieser wird später nachgeliefert).

1.5. **Faserungen (19.11.2015, Plenum).** Definieren Sie den Begriff *Faserung*. Diskutieren Sie die lange exakte Folge einer Faserung. Erläutern Sie, wie sich jede stetige Abbildung in eine Homotopieäquivalenz und eine Faserung faktorisieren lässt. Führen Sie den Begriff des Pullbacks einer Faserung ein und definieren Sie die *Homotopiefaser* einer punktierten Abbildung. Vergleichen Sie die resultierende lange exakte Folge mit der langen exakten Folge einer Abbildung aus dem ersten Vortrag. Diskutieren Sie die *Hopf-Faserung* und zeigen Sie, wie aus deren Existenz die Nicht-Trivialität von $\pi_3(S^2)$ folgt. Falls noch Zeit bleibt, skizzieren Sie die Definition von *stabiler Homotopie* und wie dies Anlass zu einer Homologietheorie gibt.

Literatur: [Hat02, Seite 375–379, vor allem 4.41, 4.45 und 4.48], [Hat02, Seite 405–408], [Walb, Satz auf Seite 62], [Hat02, Seite 384 für die Definition der stabilen Homotopiegruppen], [Hat02, Proposition 4F.1]

1.6. **Satz von Hurewicz (26.11.2015 & 3.12.2015, Jannes Bantje).** Definieren Sie den Begriff *CW-Approximation* und skizzieren Sie den Beweis der Tatsache, dass jeder topologische Raum eine CW-Approximation besitzt. Beweisen Sie [Hat02, Korollar 4.16] so, wie dies in Waldhausens Vorlesungsskript beschrieben wird. Beweisen Sie die einfachste Version des *Satzes von Hurewicz* [Hat02, Satz 4.32]. Folgern Sie [Hat02, Korollar 4.33] und damit die Aussage, dass eine Abbildung zusammenhängender CW-Komplexe, die einen Isomorphismus von Fundamentalgruppen sowie einen Homologieisomorphismus der universellen Überlagerungen induziert, eine Homotopieäquivalenz ist.

Literatur: [Hat02, Proposition 4.13], [Walb, Seite 30f.], [Hat02, Satz 4.32].

2. Einfache Homotopieäquivalenzen

2.1. **Einfache Homotopieäquivalenzen und die topologische Whitehead-Gruppe (10.12.2015, Karen Elberskirch).** Definieren Sie *elementare Erweiterungen & Kollapse*. Definieren Sie, was es heißt, eine *einfache Homotopieäquivalenz* zu sein. Definieren Sie die *topologische Whitehead-Gruppe* $\mathrm{Wh}(X)$ und beweisen Sie, dass $X \mapsto \mathrm{Wh}(X)$ ein homotopieinvarianter Funktor ist. Beweisen Sie die Charakterisierung von Elementen in $\mathrm{Wh}(X)$ [Walb, Satz auf S. 97]. Benutzen Sie diese Charakterisierung, um jeder Homotopieäquivalenz endlicher CW-Komplexe $f\colon X \to Y$ ein Element $\tau^{top}(f) \in \mathrm{Wh}(Y)$ zuzuordnen.

Literatur: [Lüc02, Kapitel 2.3], [Walb, Seite 95ff.], [Coh73, §5 & §6].

2.2. Topologische Whitehead-Torsion (17.12.2015, Julius Rahaus). Beweisen Sie den Austauschtrick; greifen Sie dabei auf das Vorwissen zurück, das im Vortrag über den Satz von Hurewicz gesammelt wurde. Erläutern Sie, wie hieraus durch Übergang zur universellen Überlagerung eine invertierbare Matrix über dem Gruppenring entsteht. Beweisen Sie das „Zellkürzungslemma“. Diskutieren Sie die Realisierbarkeit von Multiplikation mit trivialen Einheiten, Stabiliserung und elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen durch einfache Homotopieäquivalenzen.

Literatur: [Walb, Seite 98ff.], [Coh73, §7 & §8)].

2.3. K_1 und algebraische Torsion (14.01.2016, Robin Loose). Definieren Sie $K_1(R)$ für einen beliebigen Ring R. Beweisen Sie das Whitehead-Lemma. Definieren Sie die algebraische Whiteheadgruppe $\mathrm{Wh}(G)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Wh}(1) = 0$ und $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \neq 0$. Diskutieren Sie die Torsion einer Kettenhomotopieäquivalenz $\varphi\colon C \to D$ von endlichen, basierten $\mathbb{Z}[G]$-Kettenkomplexen. Beweisen Sie die Homotopieinvarianz, Summenformel und Kompositionsformel.

Literatur: [Lüc02, Kapitel 2.1 & 2.2], [DK01, Abschnitte 11.2 & 11.3].

2.4. Whitehead-Torsion (21.01.2016, Paul Bubenzer). Definieren Sie den Gruppenhomomorphismus $T\colon \mathrm{Wh}(X) \to \mathrm{Wh}(\pi_1(X))$. Beweisen Sie, dass es sich dabei um einen Isomorphismus abelscher Gruppen handelt. Definieren Sie die Whitehead-Torsion $\tau(f) \in \mathrm{Wh}(X)$ einer Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ und folgern Sie, dass $\tau(f) = 0$ genau dann, wenn die Homotopieäquivalenz einfach ist.

Literatur: [Lüc02, Kapitel 2.3], [Coh73, Kapitel IV], [DK01, Abschnitt 11.4].

2.5. Der s–Kobordismussatz (28.01.2016, Robin Sroka). Formulieren Sie den s–Kobordismussatz für glatte Mannigfaltigkeiten. Folgern Sie die Richtigkeit der Poincaré-Vermutung in Dimensionen $\geqslant 6$. Skizzieren Sie den Beweis des s-Kobordismussatzes; versuchen Sie dabei die Parallelität zu den Inhalten der vorherigen Vorträge herauszuarbeiten.

Literatur: [Lüc02, Kapitel 1 & 2.2]

Hinweis: Ein Teil der Literatur für das Seminar ist online auf den Homepages der Autoren verfügbar:

- [Hat02]: http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html
- [Lüc02]: http://131.220.77.52/lueck/publications.php
- [Wala], [Walb]: https://www.math.uni-bielefeld.de/~fw/

Leider ist [FP90] nicht in der Bibliothek vorhanden. Falls Sie diese Quelle verwenden wollen, sprechen Sie mit Christoph Winges.

Literatur

[Coh73] Marshall M. Cohen. *A course in simple-homotopy theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10.

[DK01] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[FP90] Rudolf Fritsch and Renzo A. Piccinini. *Cellular structures in topology*, volume 19 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Lüc02] Wolfgang Lück. A basic introduction to surgery theory. In *Topology of high-dimensional manifolds, No. 1, 2 (Trieste, 2001)*, volume 9 of *ICTP Lect. Notes*, pages 1–224. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2002.

[Wala] Friedhelm Waldhausen. Algebraische Topologie. Vorlesungsskript.

[Walb] Friedhelm Waldhausen. Algebraische Topologie II. Vorlesungsskript.