M. Welter

Übungen zum
Vorkurs Mathematik für Studienanfänger
2004

Einige Zeichen und Konventionen:
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – Die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – Die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ – Die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ – Die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ – Die Menge der Primzahlen
$\sum$ – Summenzeichen, also z.B. $\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$
$\prod$ – Produktzeichen, also z.B. $\prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$
Ein leeres Produkt ist gleich 1, eine leere Summe 0.

***

Die Übungen finden in 8 verschiedenen Gruppen jeweils in der Zeit von 14 – 16 Uhr statt. Die Orte der Übungsgruppen sind:
Zeichensaal; Wegelerstr. 10
Seminarräume A und B; Beringstr. 4
Seminarraum C; Beringstr. 1
Seminarräume D, E und F; Meckenheimer Allee 160, Zugang nur über Beringstr. 1
Seminarraum G; Hörsaalgebäude der Physik, Kreuzbergweg
Die Einteilung in die Übungsgruppen wird am Dienstag, den 31.08.2004, bekannt gegeben.

Die folgenden Aufgaben sind für **Dienstag, den 31.08.,** vorzubereiten:

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$, gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Folgern Sie hieraus für $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

(i) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 3$ ist $n^2 > 2n + 1$.

(ii) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.

Aufgabe 4: (Die Fibonacci–Zahlen)
Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der sog. *Fibonacci–Zahlen* ist rekursiv definiert durch die Vorschrift $f_0 := 0, f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Es sei $a := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $b := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, so dass a und b offensichtlich die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$$

und

$$a^{n-2} \leq f_n \leq a^{n-1}.$$

Die folgenden Aufgaben sind für **Mittwoch, den 01.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 5: (Binomialkoeffizienten)
Die Fakultät $n!$ ist für $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch $0! := 1$ und $n! := n \cdot (n-1)!$. Weiter definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ den Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$ durch

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(i) $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

(ii) $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k+1} + \binom{m}{k}$.

(iii) $\binom{m}{k} \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6: (Der Binomische Lehrsatz)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(ii) Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt $\binom{n}{k} \leq 2^n$.

Aufgabe 7:

(i) Zeigen Sie, dass sich jede ungerade Zahl $n \geq 3$ als Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen darstellen läßt.

(ii) Bestimmen Sie alle Darstellungen der Zahlen 15, 19, 27 als Differenz von zwei (nicht notwendigerweise aufeinanderfolgenden) Quadratzahlen.
Bemerkung: Geben Sie ein Argument an, warum Sie wirklich alle Darstellungen gefunden haben.

(iii) Zeigen Sie, dass eine ungerade Zahl $n \geq 3$ genau dann Primzahl ist, wenn sie nur eine Darstellung als Differenz von zwei Quadratzahlen besitzt.

Die folgenden Aufgaben sind für **Donnerstag, den 02.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 8: Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $d := \mathrm{ggT}(n, m)$. Zeigen Sie:

(i) $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_p(n), \nu_p(m))}$.

(ii) $d = \min(\{nu + mv | u, v \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N})$.

(iii) $\mathrm{ggT}\left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$, d.h. $\frac{n}{d}$ und $\frac{m}{d}$ sind teilerfremd.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie ein Tupel (x, y) ganzer Zahlen, so dass

$$4641x + 6615y = 105.$$

Aufgabe 10: Es bezeichne $\tau(n)$ die Anzahl der positiven Teiler der natürlichen Zahl n und $\nu_p(n)$ die Vielfachheit von p in n, also den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n.

(i) Zeigen Sie: $\tau(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (\nu_p(n) + 1)$.

(ii) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 12 mit genau zwei Primteilern und genau 14 Teilern.

(iii) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 30 mit genau 30 Teilern.

Aufgabe 11:

(i) Es sei p eine Primzahl. Folgern Sie aus dem Fundamentalsatz der Arithmetik, dass $\sqrt{p}$, also die positive Lösung der Gleichung $x^2 = p$, irrational ist, d.h. $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.

(iii) Seien p, q verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass $\frac{\ln p}{\ln q}$ irrational ist.

Die folgenden Aufgaben sind für **Freitag, den 03.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 12:

(i) Es seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd, $m := m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$a \equiv b \pmod{m_\ell} \text{ für } \ell = 1, \ldots, k \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b \pmod{m}$$

(ii) Falls für $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ die Kongruenzen

$$a_i \equiv b_i \pmod{m} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

gültig sind, so gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \pmod{m} \\ \prod_{i=1}^{n} a_i &\equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}. \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{-13}, \overline{-9}, \overline{-4}, \overline{-1}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{21}\}$.

Aufgabe 13: (Teilbarkeitskriterien)
Es sei $a = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$ die Dezimalentwicklung der Zahl $a \in \mathbb{N}$ und $s := \sum_{k=0}^{n} a_k$ ihre Quersumme. Zeigen Sie mit der vorhergehenden Aufgabe:

$$\begin{aligned} 3|a \quad &\Leftrightarrow \quad 3|s \\ 9|a \quad &\Leftrightarrow \quad 9|s. \end{aligned}$$

Gibt es eine ähnliche Regel für die Division durch 11?

Aufgabe 14:

(i) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und Primzahlen p

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

gilt.
Tipp: Man überlege sich, dass $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ für $1 \leq k \leq p-1$.

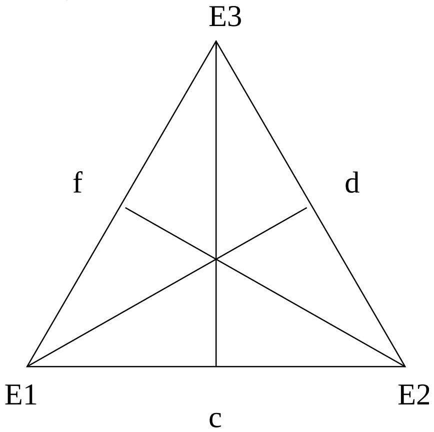
(ii) Folgern Sie hieraus: Für alle $a > 0$ gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$. Sind a und p teilerfremd, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Die folgenden Aufgaben sind für **Montag, den 06.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 15: Prüfen Sie auf Assoziativität und Kommutativität:

$$
\begin{array}{rl}
(\mathbb{Q}, \diamond) & \text{mit } x \diamond y := \dfrac{x+y}{2} \\
(\mathbb{Z}, -) & \\
(\mathbb{N}, \star) & \text{mit } x \star y := x^y \\
(\mathbb{N}, \triangle) & \text{mit } x \triangle y := x \\
(\{-1, 0, 1\}, \heartsuit) & \text{mit } x \heartsuit y := x \cdot y^3 \quad \text{(Verknüpfungstafel)}
\end{array}
$$

Aufgabe 16:



Wir betrachten die Deckbewegungen des gleichseitigen Dreiecks $E_1E_2E_3$:

$$
\begin{array}{rl}
D_{120} & \text{Drehung um 120 Grad (entgegen dem Uhrzeigersinn)} \\
D_{240} & \text{Drehung um 240 Grad} \\
D_0 & \text{Drehung um 0 Grad} \\
W_c, W_d, W_f & \text{Wendungen um die entsprechende Achse}
\end{array}
$$

Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für $(\{D_0, D_{120}, D_{240}, W_c, W_d, W_f\}, \star)$ auf, wobei $\star$ die Hintereinanderausführung der Deckbewegungen sei. Suchen Sie in der Tafel neutrale und inverse Elemente. Untersuchen Sie die Verknüpfung auf Kommutativität.

Aufgabe 17: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ein Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

bezeichnet man als (zweireihige) Matrix (reeller Zahlen). Die Menge aller zweireihigen Matrizen reeller Zahlen bezeichnen wir mit $M_2(\mathbb{R})$. Die Determinante dieser Matrix ist gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Für zwei Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

sei das Produkt der Matrizenmultiplikation definiert durch

$$M_1 \cdot M_2 := \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(i) $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Es existiert ein neutrales Element, aber nicht jedes Element besitzt ein Inverses.

(ii) Für $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(M_1 \cdot M_2) = \det M_1 \cdot \det M_2$.

Die folgenden Aufgaben sind für **Dienstag, den 07.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 18: Es bezeichne $M_2(\mathbb{Z})$ die Menge aller zweireihigen Matrizen ganzer Zahlen und Γ sei die Menge aller $A \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $\det A = 1$. Zeigen Sie, dass $(\Gamma, \cdot)$ eine unendliche, nicht abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 19: Es sei $\mathcal{S} := \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 1(4)\}$. Eine Zahl $n \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ heißt $\mathcal{S}$–unzerlegbar genau dann, wenn 1 und n die einzigen Teiler von n in $\mathcal{S}$ sind. Zeigen Sie:

(i) Jedes $n \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ läßt sich als endliches Produkt von $\mathcal{S}$–unzerlegbaren Zahlen darstellen.

(ii) Diese Darstellung ist im Allgemeinen nicht eindeutig; auch dann nicht, wenn man die Faktoren der Größe nach ordnet.

Aufgabe 20: Wir betrachten die folgende Teilmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

$$K := \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind, wobei $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation auf den rationalen Zahlen bedeutet.

Aufgabe 21: (Noch einmal Fibonacci–Zahlen)
Es bezeichne f_n die $n-$te Fibonacci–Zahl (vgl. Aufgabe 4).

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

(ii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$. Man folgere hieraus, dass f_{mn} durch f_m teilbar ist.

(iii) $f_n f_{n+2} - (f_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$.

Tipp: Aufgabe 17.

Die folgenden Aufgaben sind für **Mittwoch, den 08.09.,** vorzubereiten:

Aufgabe 22:

(i) Zeigen Sie, dass $M_k := 2^k - 1$ höchstens dann eine Primzahl ist, wenn k eine Primzahl ist.

(ii) Es seien nun p und q Primzahlen. Zeigen Sie: Ist p ein Primteiler von M_q, so gilt $p \equiv 1 \mod q$.

(iii) Der kleinste mögliche Primteiler von M_{251} ist also 503. Zeigen Sie, dass 503 tatsächlich ein Teiler von M_{251} ist.

Bemerkung: Primzahlen der Form $M_p = 2^p - 1$ nennt man Mersenne-Primzahlen. Die größte bekannte Mersenne-Primzahl (und die größte bekannte Primzahl überhaupt) ist $M_{24036583}$.

Aufgabe 23: Zeigen Sie:

(i) Aus $d|n$ folgt $\varphi(d)|\varphi(n)$.

(ii) Es gibt keine natürliche Zahl n mit $\varphi(n) = 14$.

(iii) $\varphi(a^n - 1)$ ist für $a > 1$ durch n teilbar.
Tipp: Euler–Fermat

Aufgabe 24: (Goldbachs Beweis des Satzes von Euklid)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n := 2^{2^n} + 1$ die sogenannte n–te Fermat-Zahl.

(i) Zeigen Sie, dass $F_n - 2 = \prod_{i=0}^{n-1} F_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Folgern Sie hieraus, dass für je zwei $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ die Zahlen F_i und F_j teilerfremd sind, dass also $\mathrm{ggT}(F_i, F_j) = 1$ ist.

(iii) Folgern Sie hieraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Bemerkung: Es ist per definitionem $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Aufgabe 25: (Aus einem chinesischen Rechenbuch)
Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben 3 Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung 10 Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt liess sich endlich die Beute gleichmäßig verteilen. Wie viele Goldstücke waren mindestens im Sack?