π und die Quadratur des Kreises

Schnupper-Uni für SchülerInnen

8. Februar 2006

Dr. Michael Welter

http://www.math.uni-bonn.de/people/welter

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Gegeben sei eine Menge von Punkten in der Ebene. Dann sind die folgenden beiden Operationen erlaubt, um neue Punkte zu konstruieren:

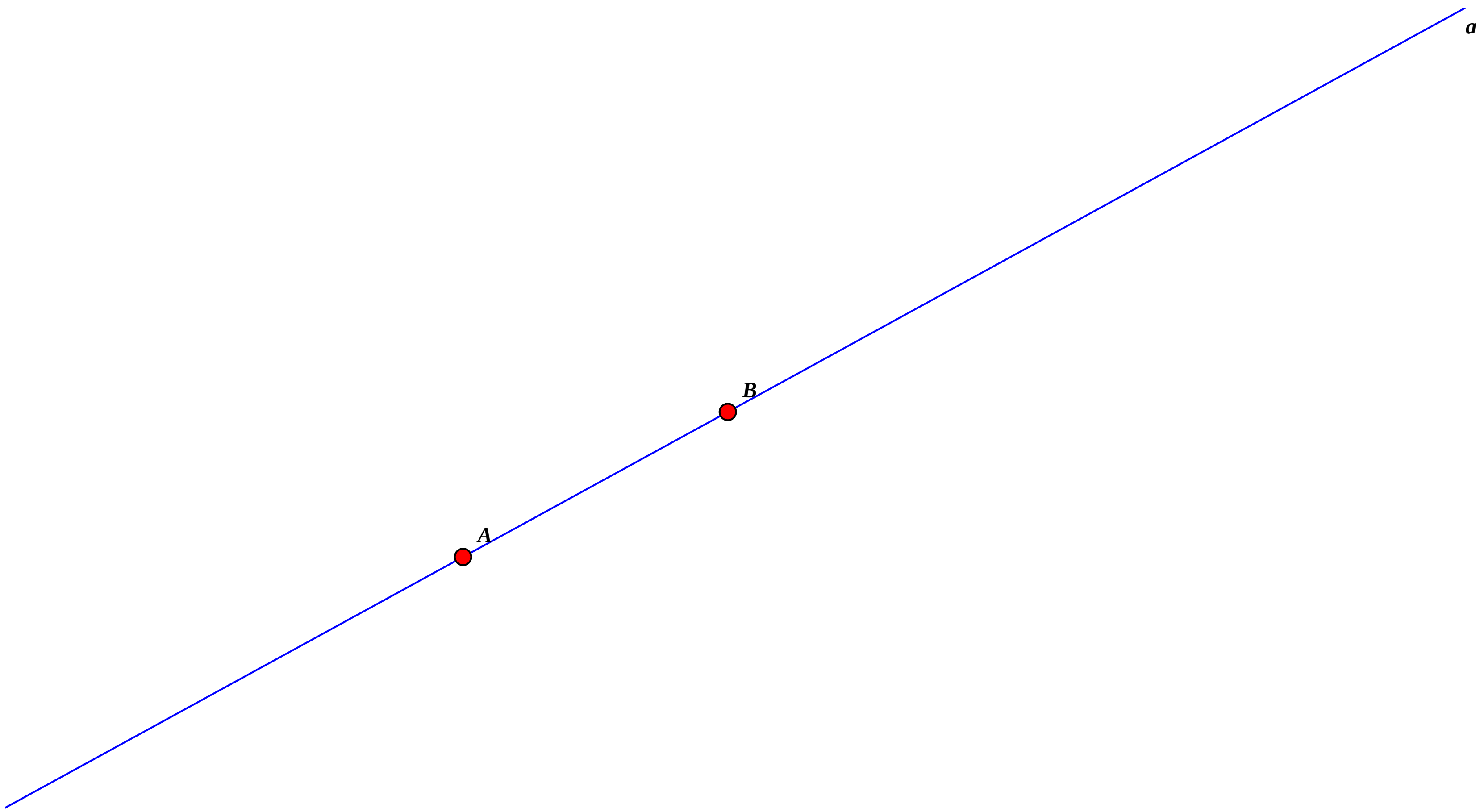
Op.1 Lineal: Lege eine Gerade durch 2 bereits konstruierte Punkte

Op.2 Zirkel: Zeichne einen Kreis um einen bereits konstruierten Punkt, mit Radius = Abstand zweier bereits konstruierter Punkte

Neue Punkte erhält man als Schnittpunkte von den konstruierten Geraden oder Kreisen.

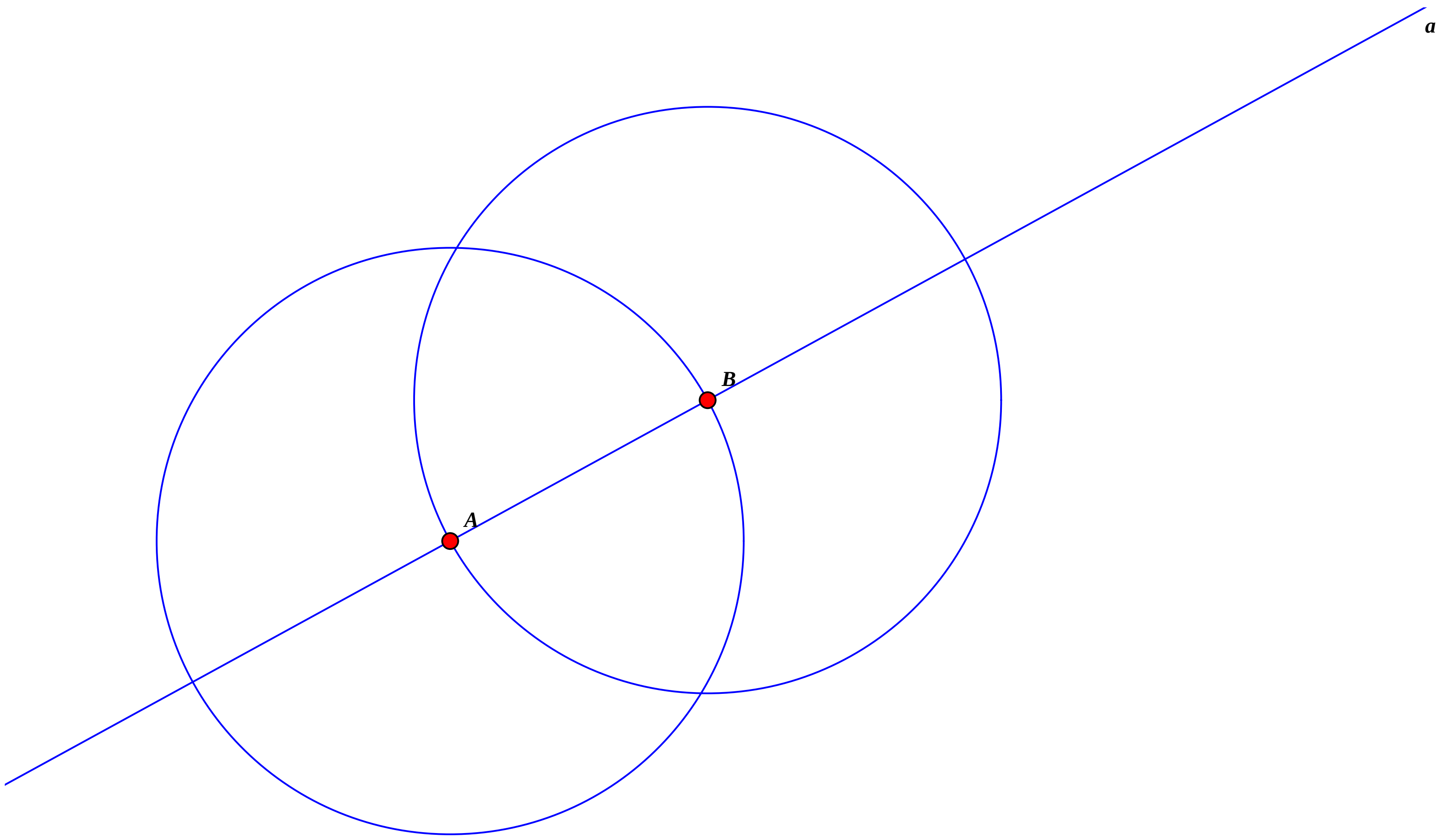
Beispiel 1

- Mittelpunkt einer Strecke



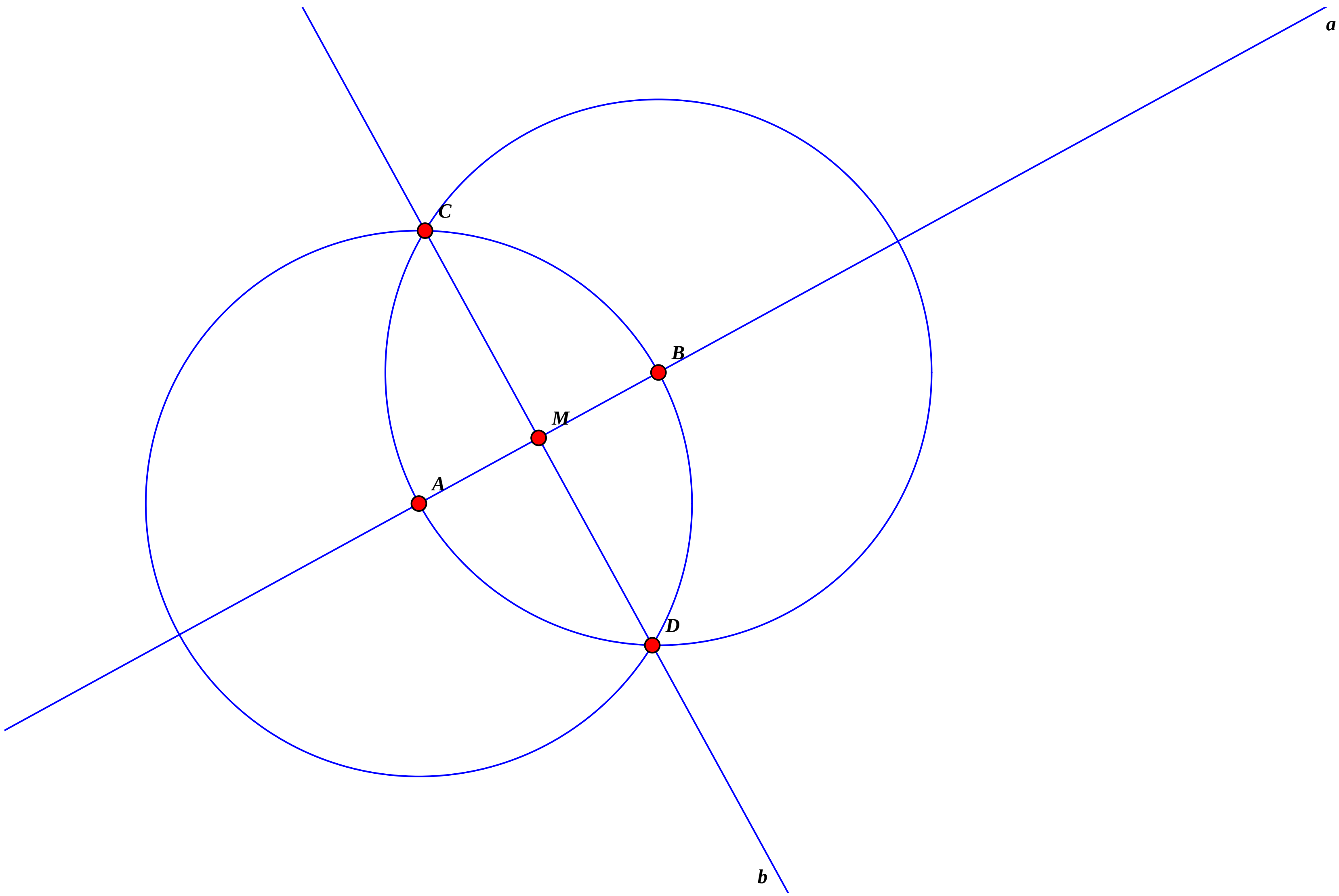
Beispiel 1

- Mittelpunkt einer Strecke



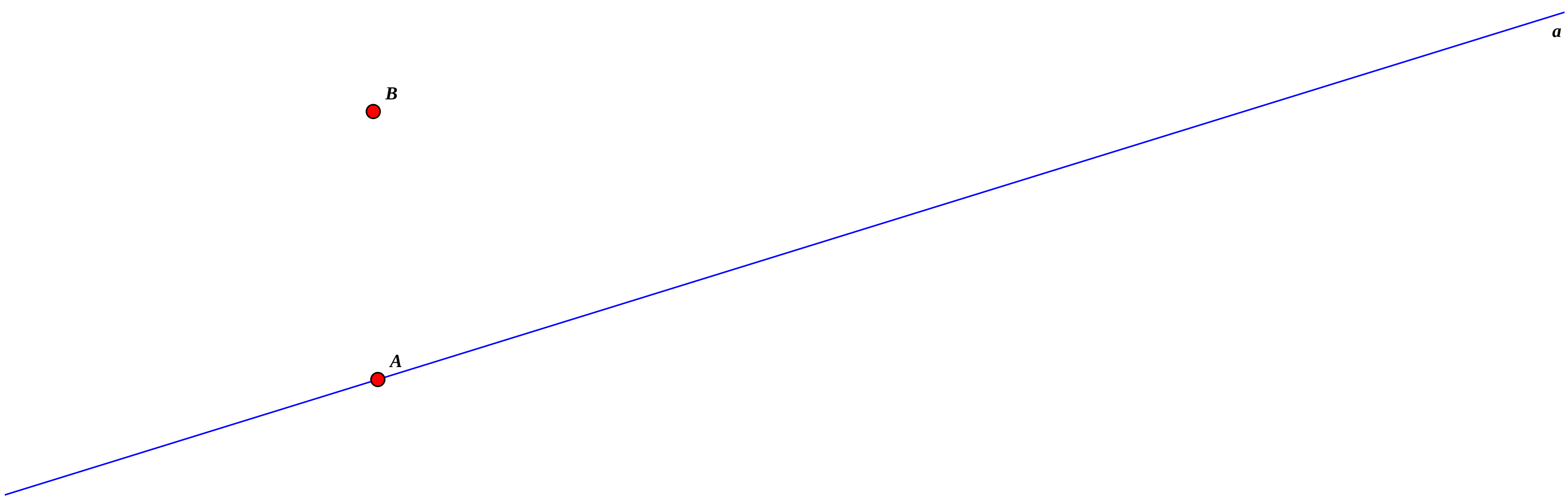
Beispiel 1

- Mittelpunkt einer Strecke <u>und</u> Mittelsenkrechte



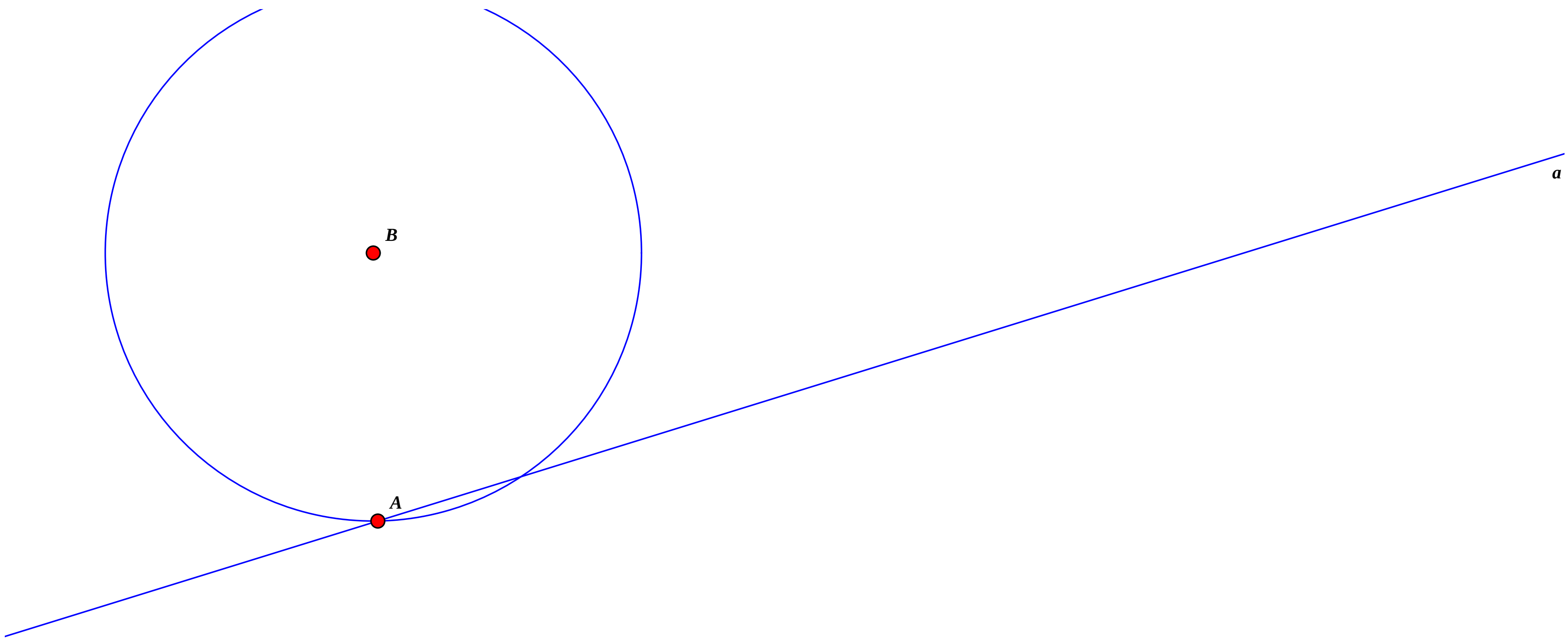
Beispiel 2

- Parallele zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt



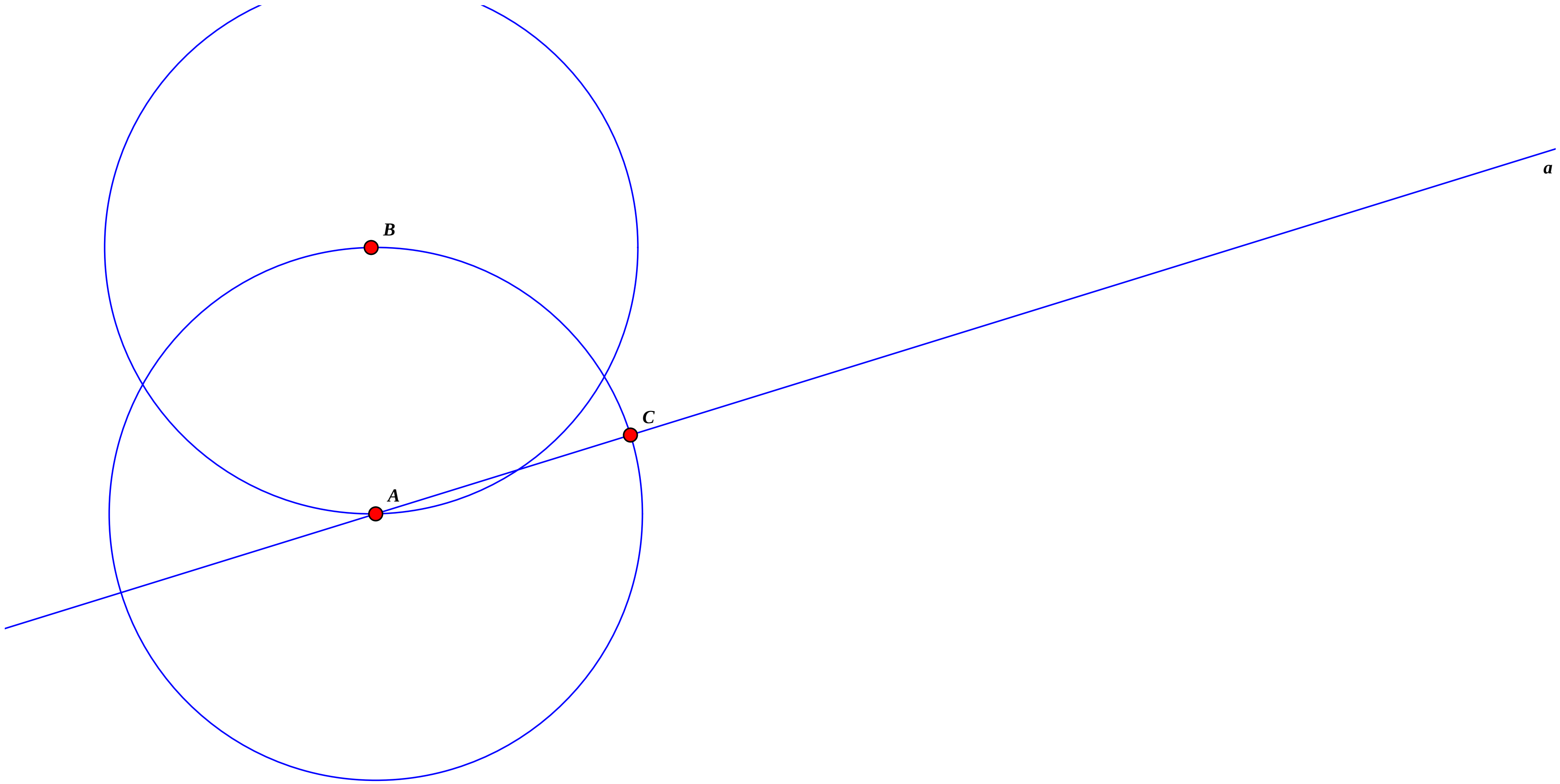
Beispiel 2

- Parallele zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt



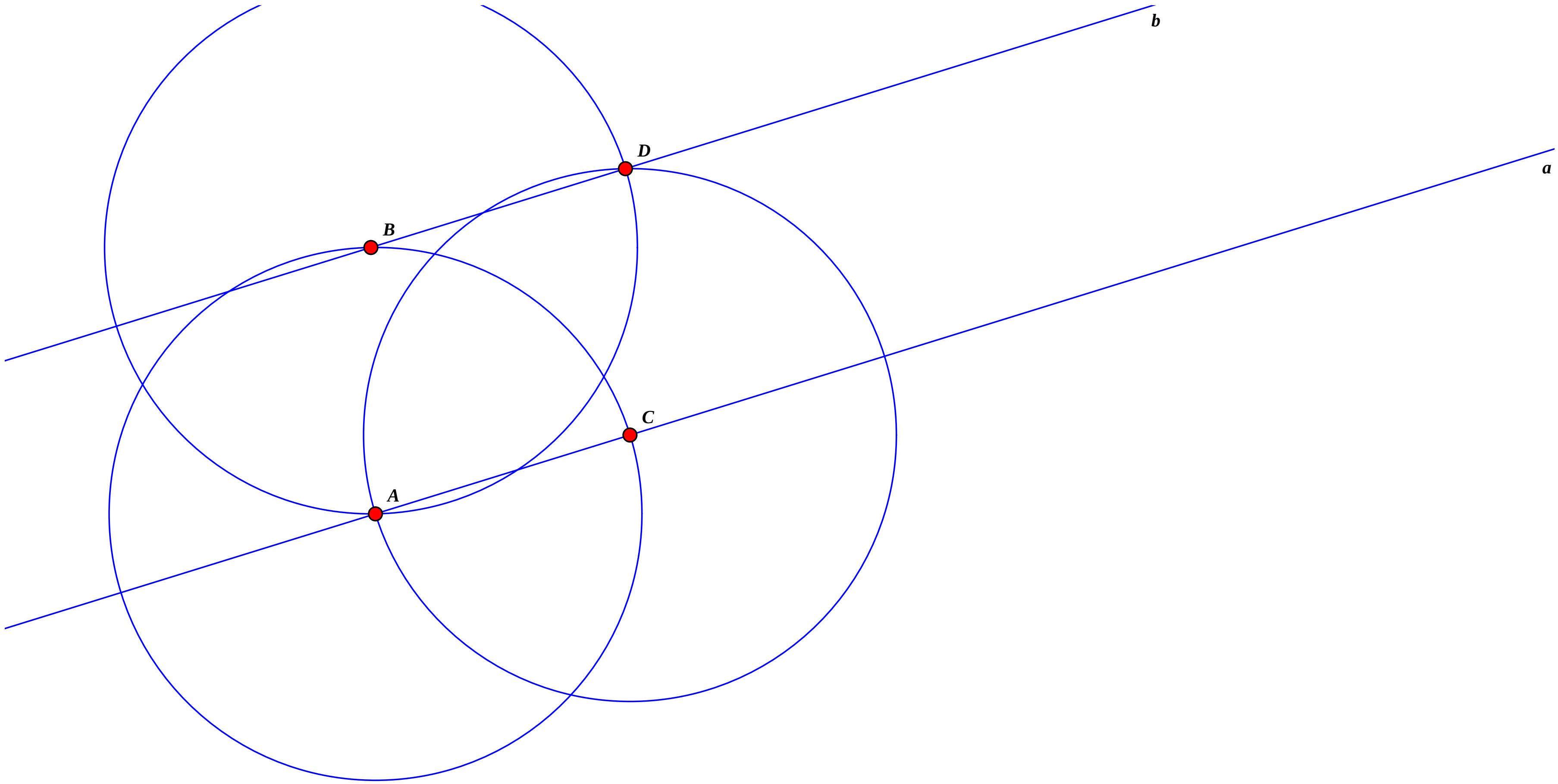
Beispiel 2

- Parallele zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt



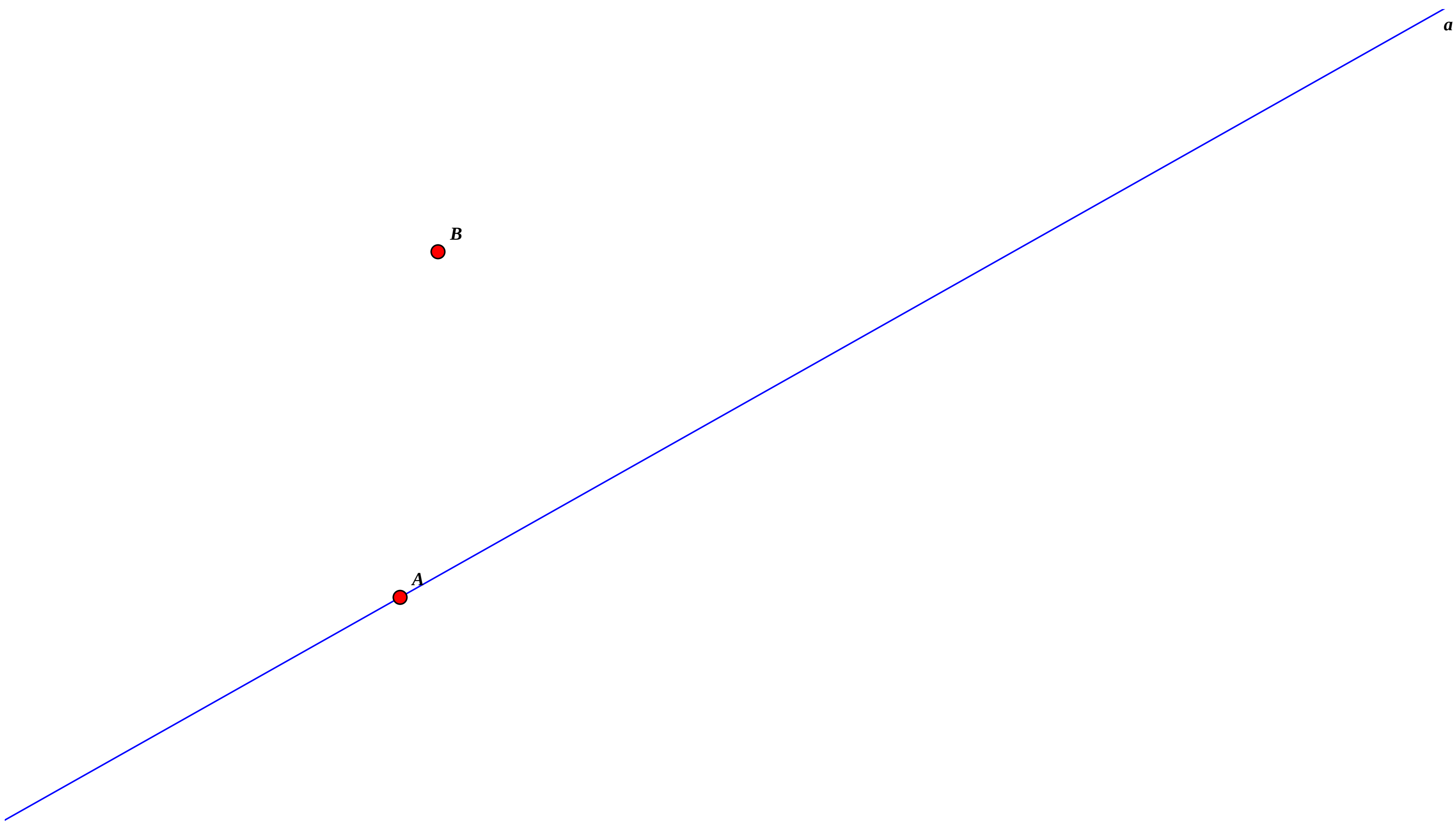
Beispiel 2

- Parallele zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt



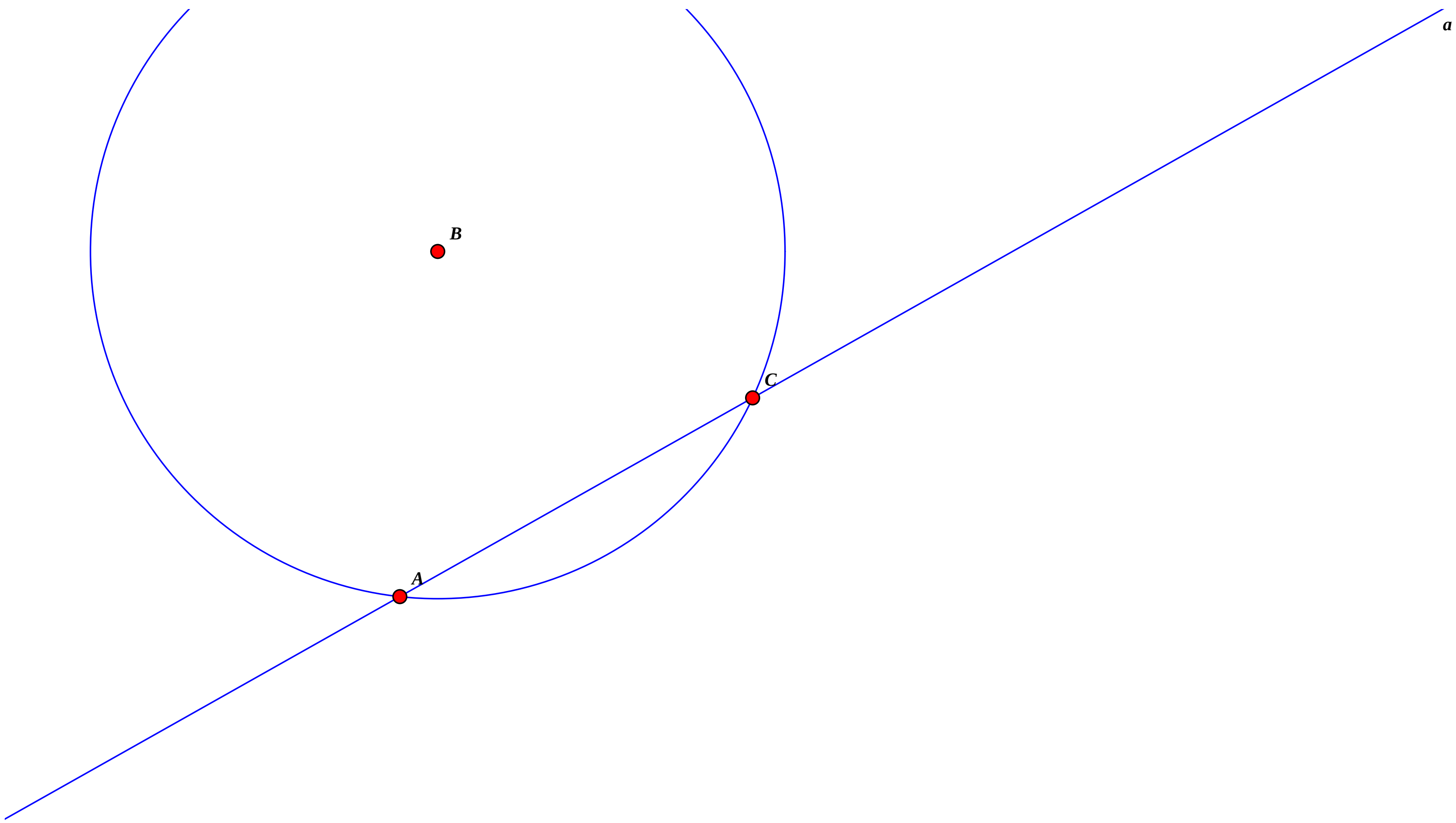
Beispiel 3

- Lot von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade



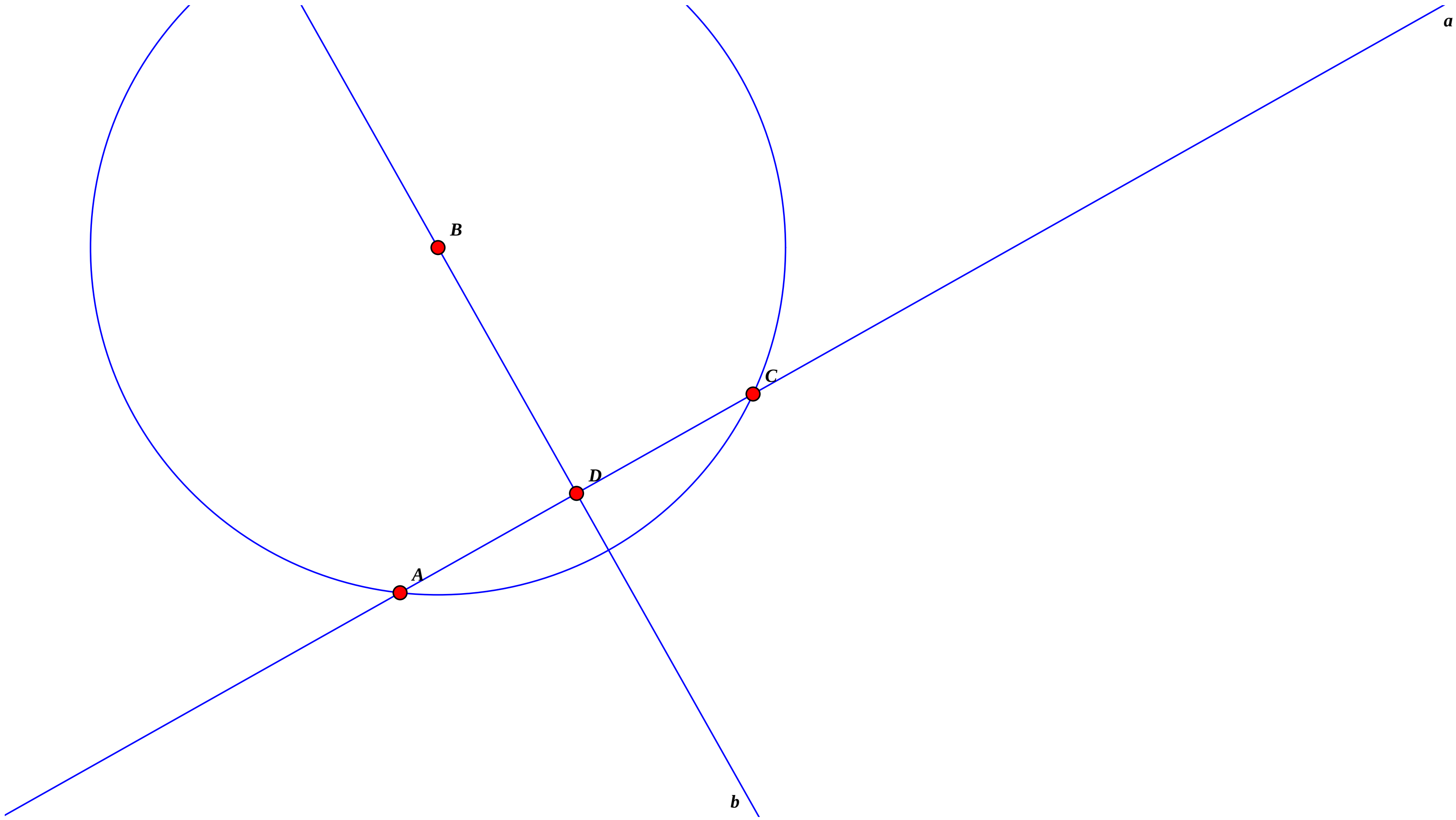
Beispiel 3

- Lot von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade



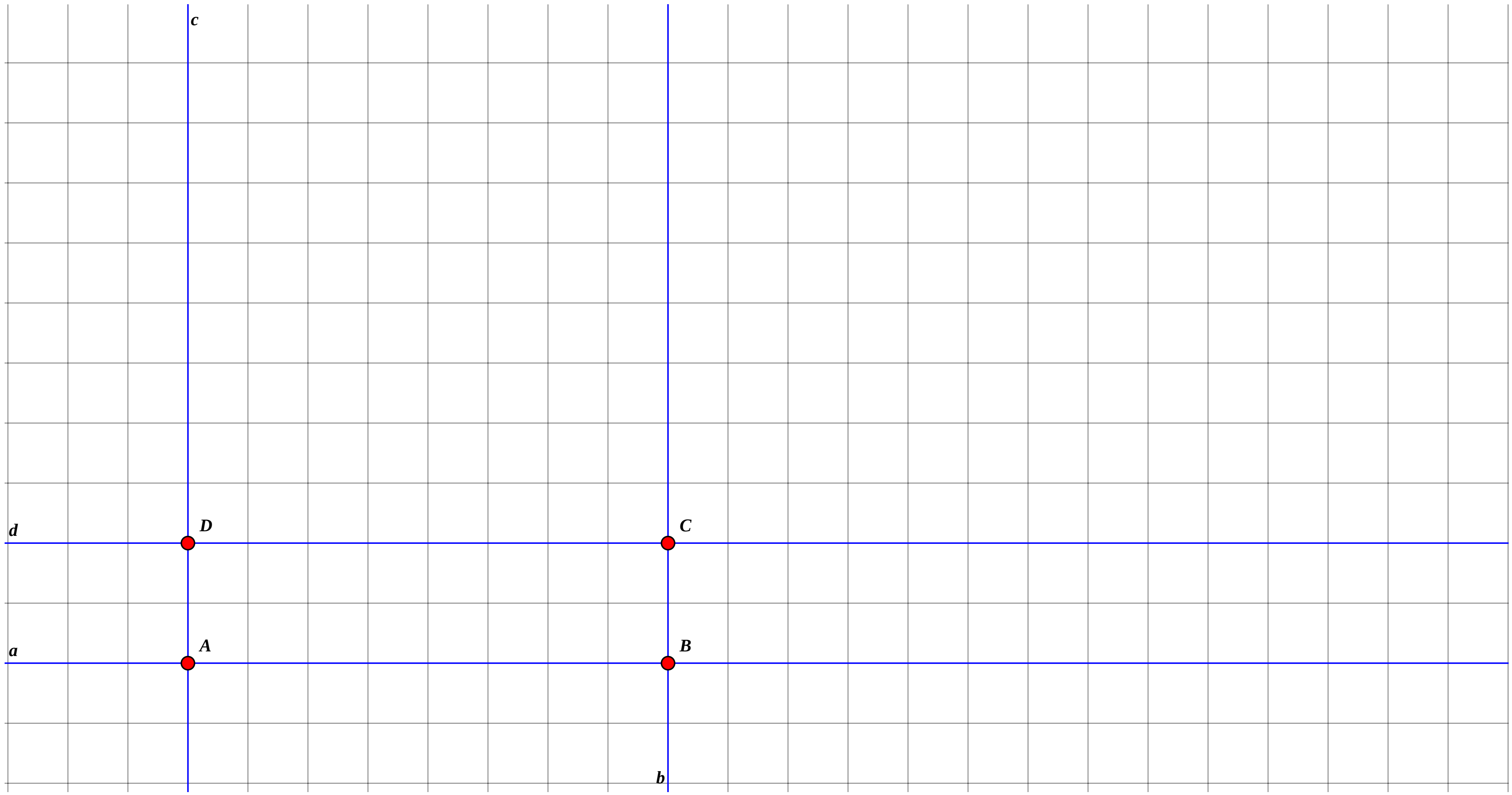
Beispiel 3

- Lot von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade



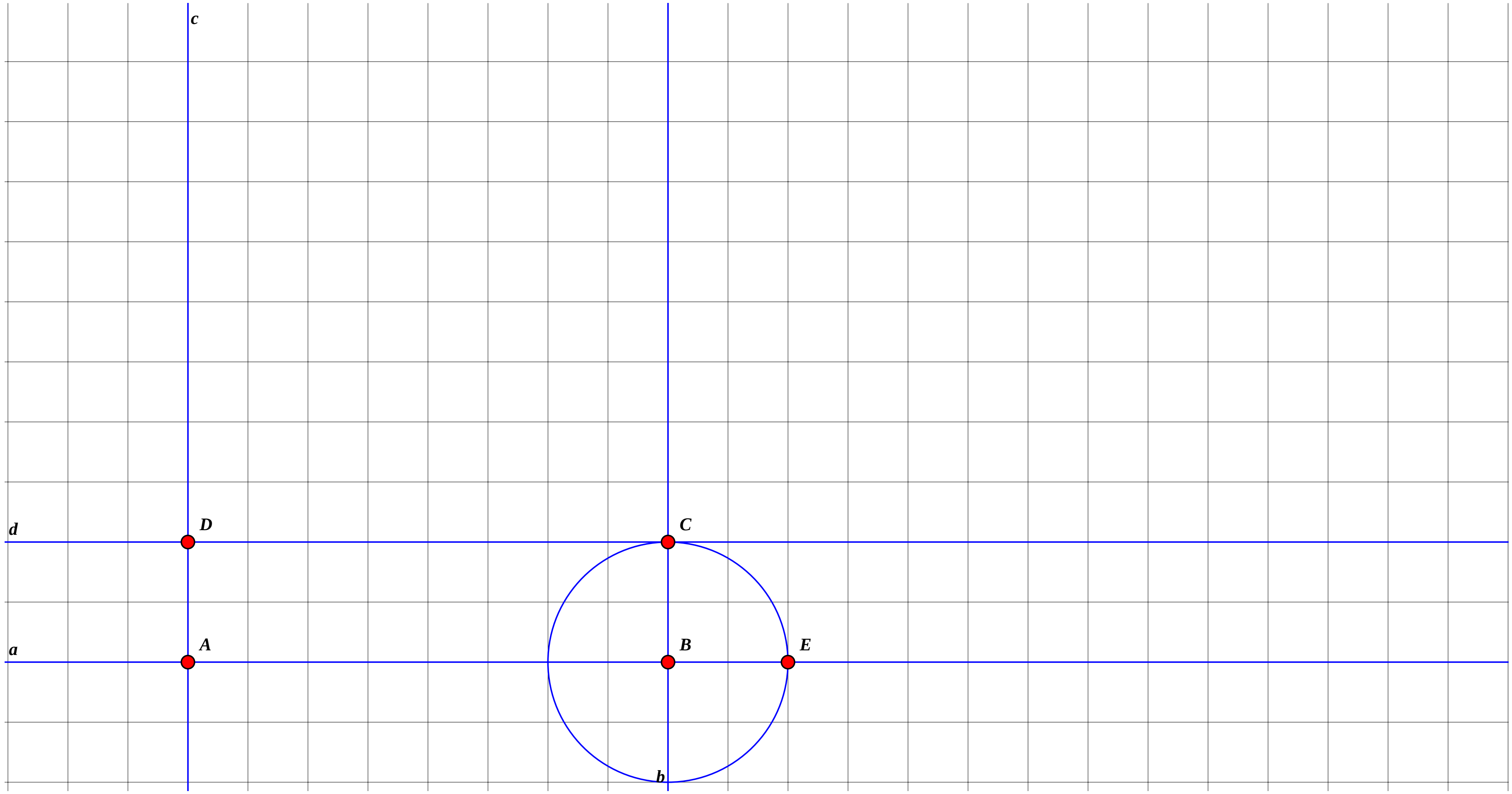
Beispiel 4

Gegeben sei ein Rechteck (durch die vier Eckpunkte). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck?



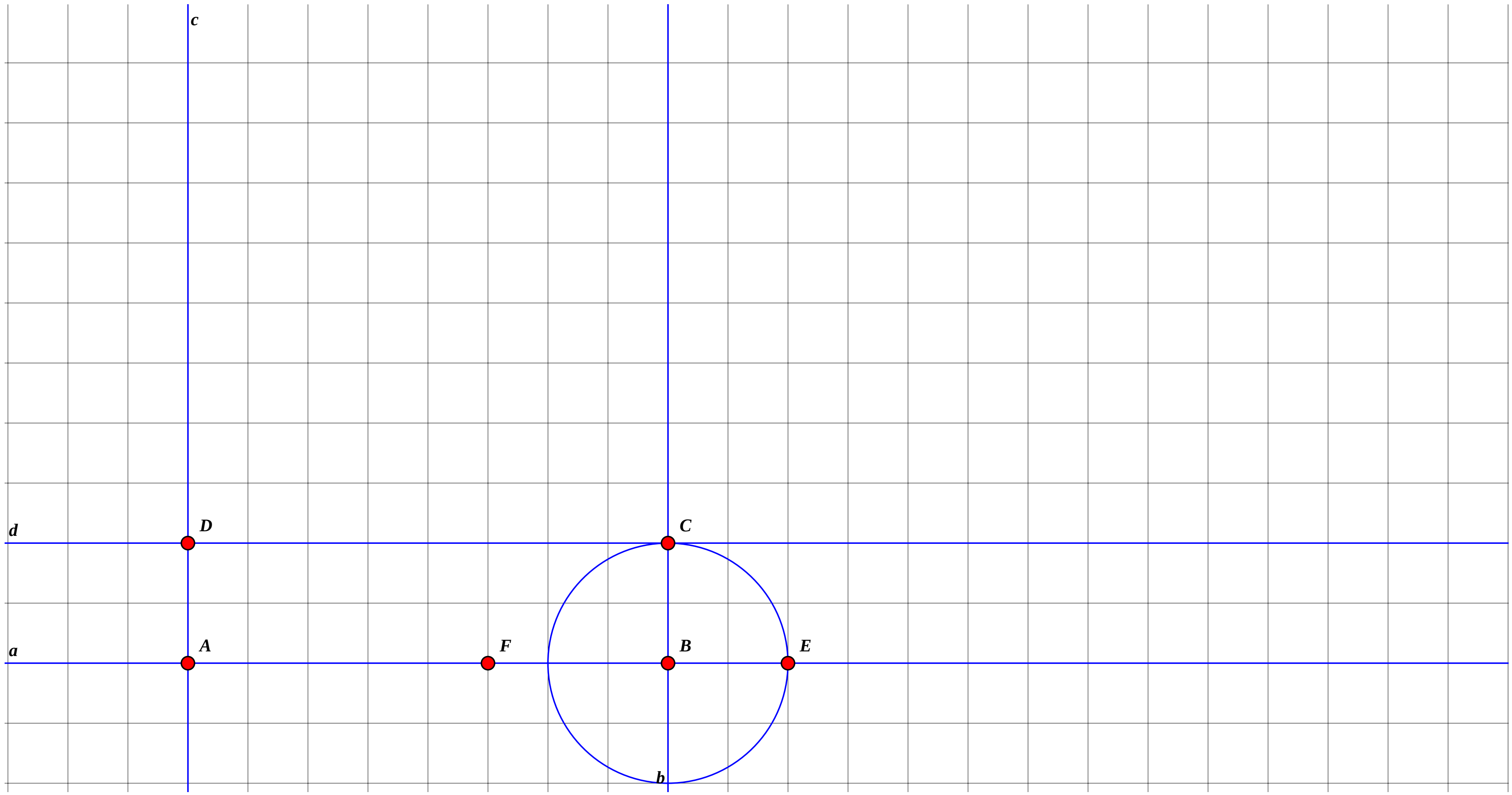
Beispiel 4

Gegeben sei ein Rechteck (durch die vier Eckpunkte). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck?



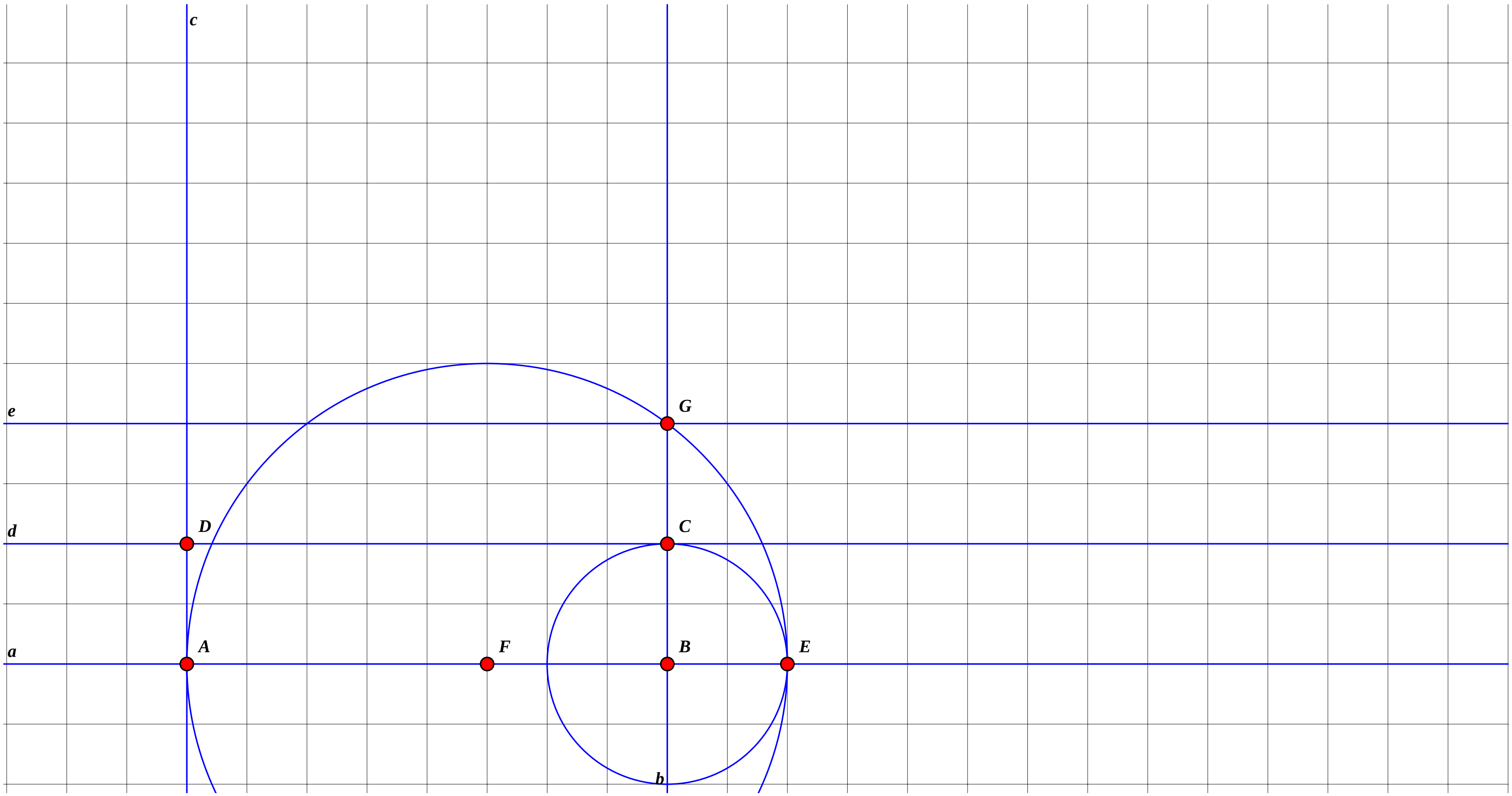
Beispiel 4

Gegeben sei ein Rechteck (durch die vier Eckpunkte). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck?



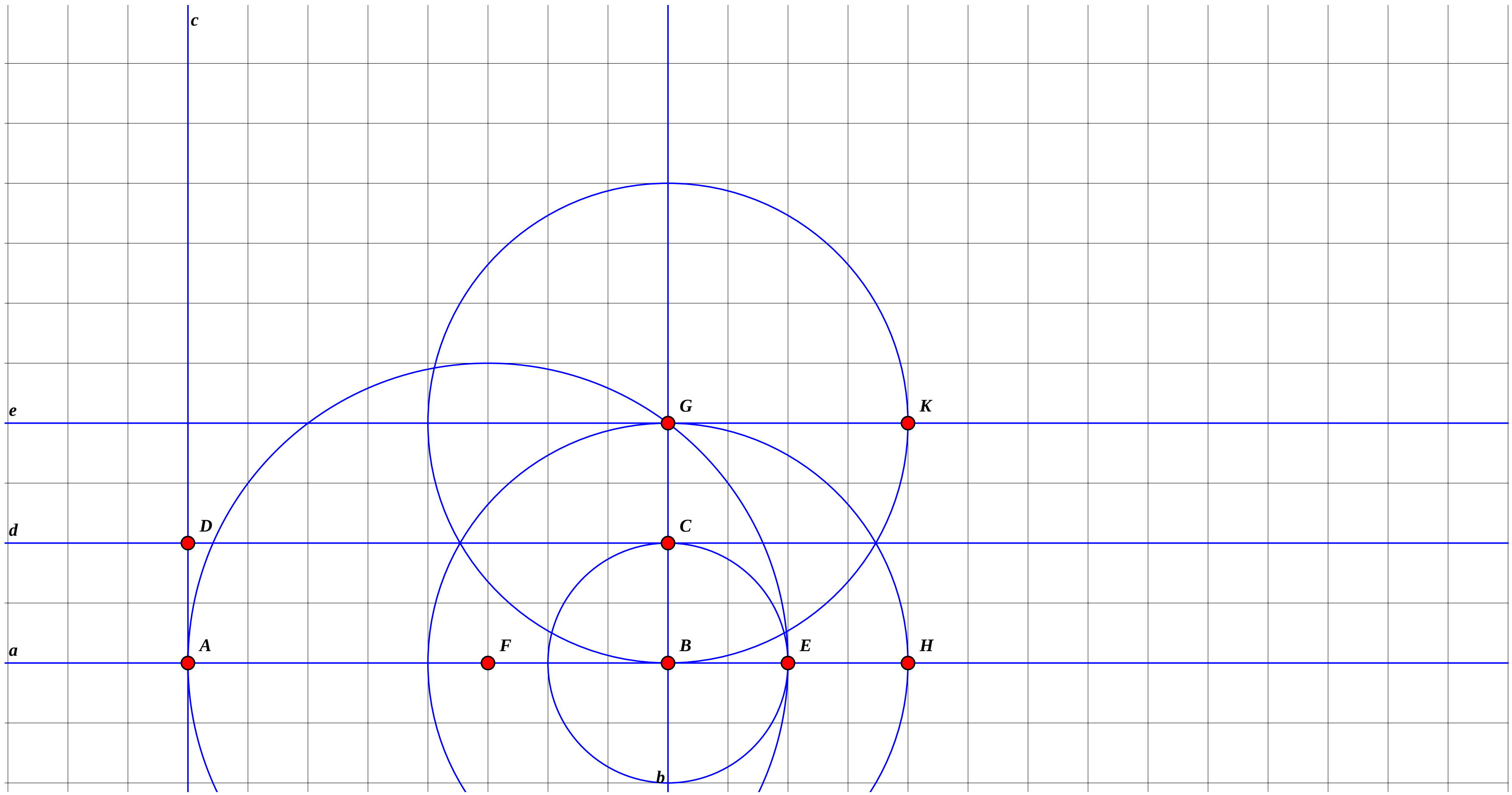
Beispiel 4

Gegeben sei ein Rechteck (durch die vier Eckpunkte). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck?



Beispiel 4

Nach dem Höhensatz hat das Quadrat mit den Eckpunkten B,H,K,G denselben Flächeninhalt, wie das Rechteck mit den Eckpunkten A,B,C,D.



Frage: Quadratur des Kreises

Gegeben sei ein Kreis (durch den Mittelpunkt und einen Punkt auf dem Kreis). Lässt sich dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie der Kreis?

Historische Bemerkungen

Näherungslösungen werden schon im Papyrus Rhind beschrieben (ca. 1700 v. Chr.)

Antiphon 430 v. Chr., Aristoteles 350 v. Chr., Archimedes 250 v. Chr., ...

Ergebnis:

- Keine exakte Lösungsmöglichkeit gefunden
- Näherungslösung mit Zirkel und Lineal
- Exakte Lösung mit anderen Methoden

Vermutung: Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich.

Wie kann man beweisen, dass ein Konstruktionsproblem **nicht** lösbar ist?

Algebraisierung des Problems

Wir identifizieren die Zeichenebene mit dem $\mathbb{R}^2$, d.h. **Punkte** sind gegeben durch ihre Koordinaten: $P = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Definition: Ein Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt *konstruierbar*, wenn er aus den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 0)$ in einer endlichen Anzahl von Anwendungen der Operationen Op1 und Op2 konstruiert werden kann.

Definition: Eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt *konstruierbar*, wenn der Punkt $(r, 0)$ konstruierbar ist.

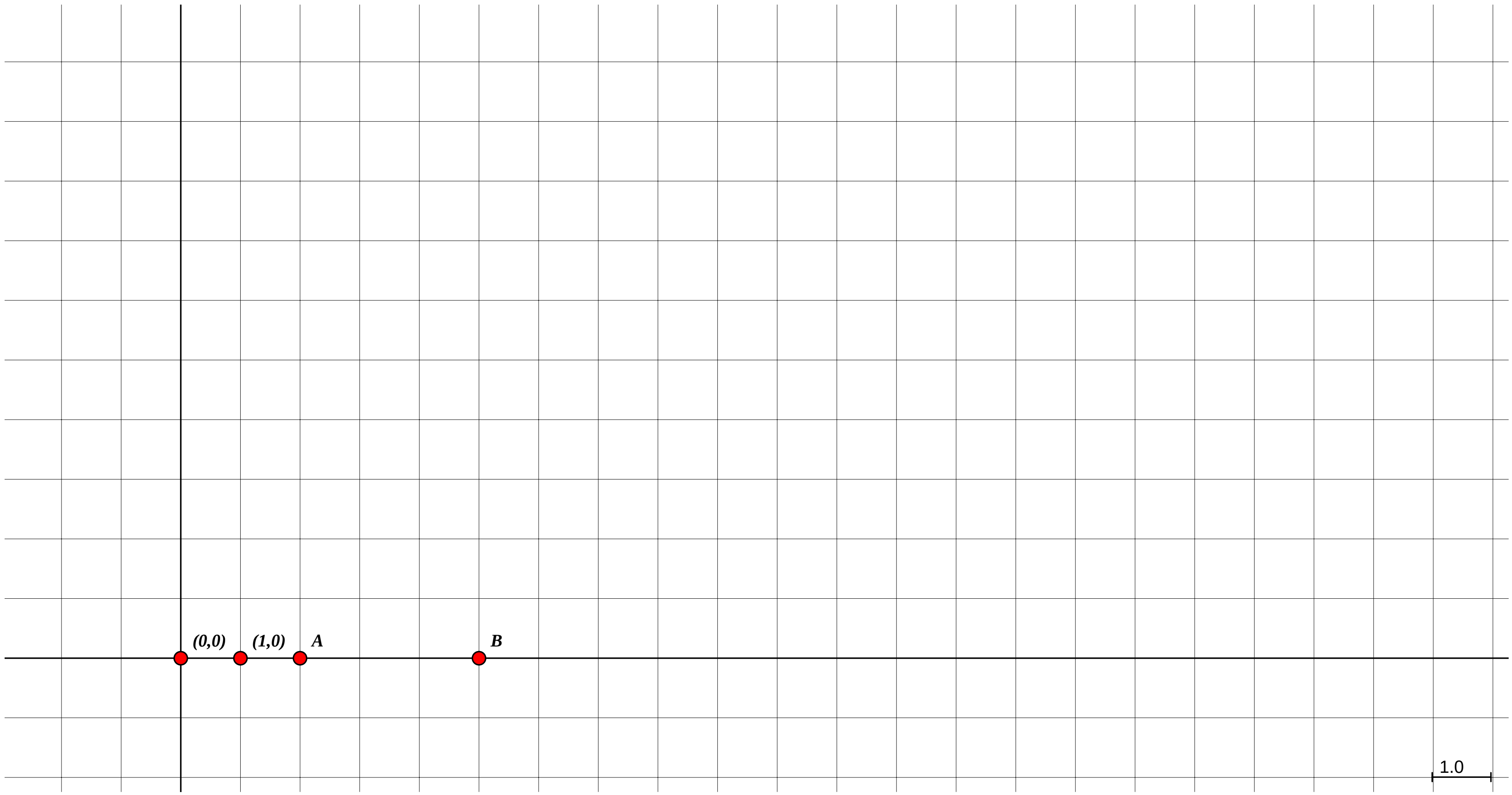
Dies ist gleichbedeutend damit, dass zwei Punkte mit Abstand r konstruiert werden können.

Satz *Sind* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *konstruierbar und* $\alpha \neq 0$*, so sind auch*

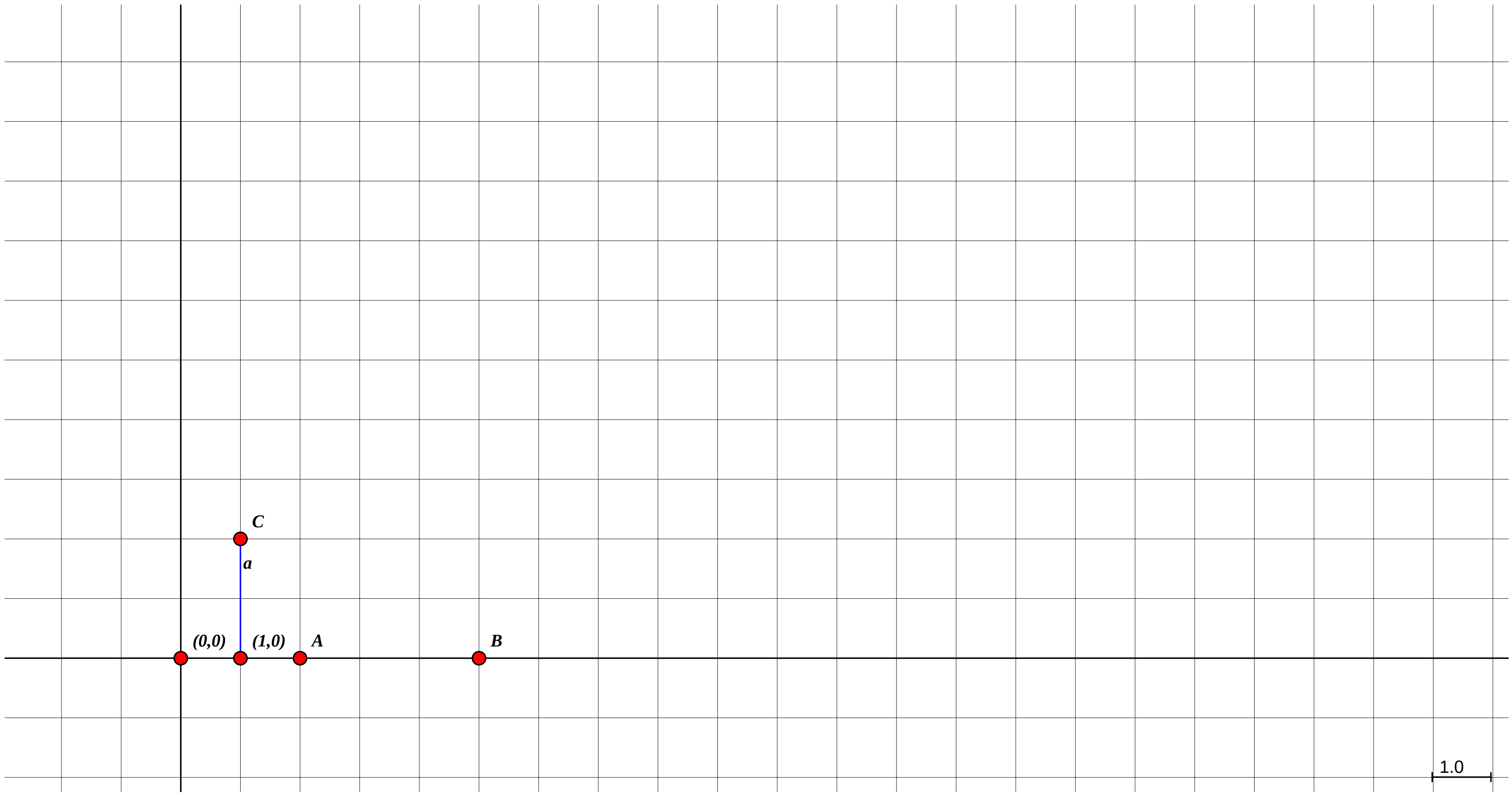
$$-\alpha, 1/\alpha, \alpha + \beta \text{ und } \alpha \cdot \beta$$

konstruierbar.

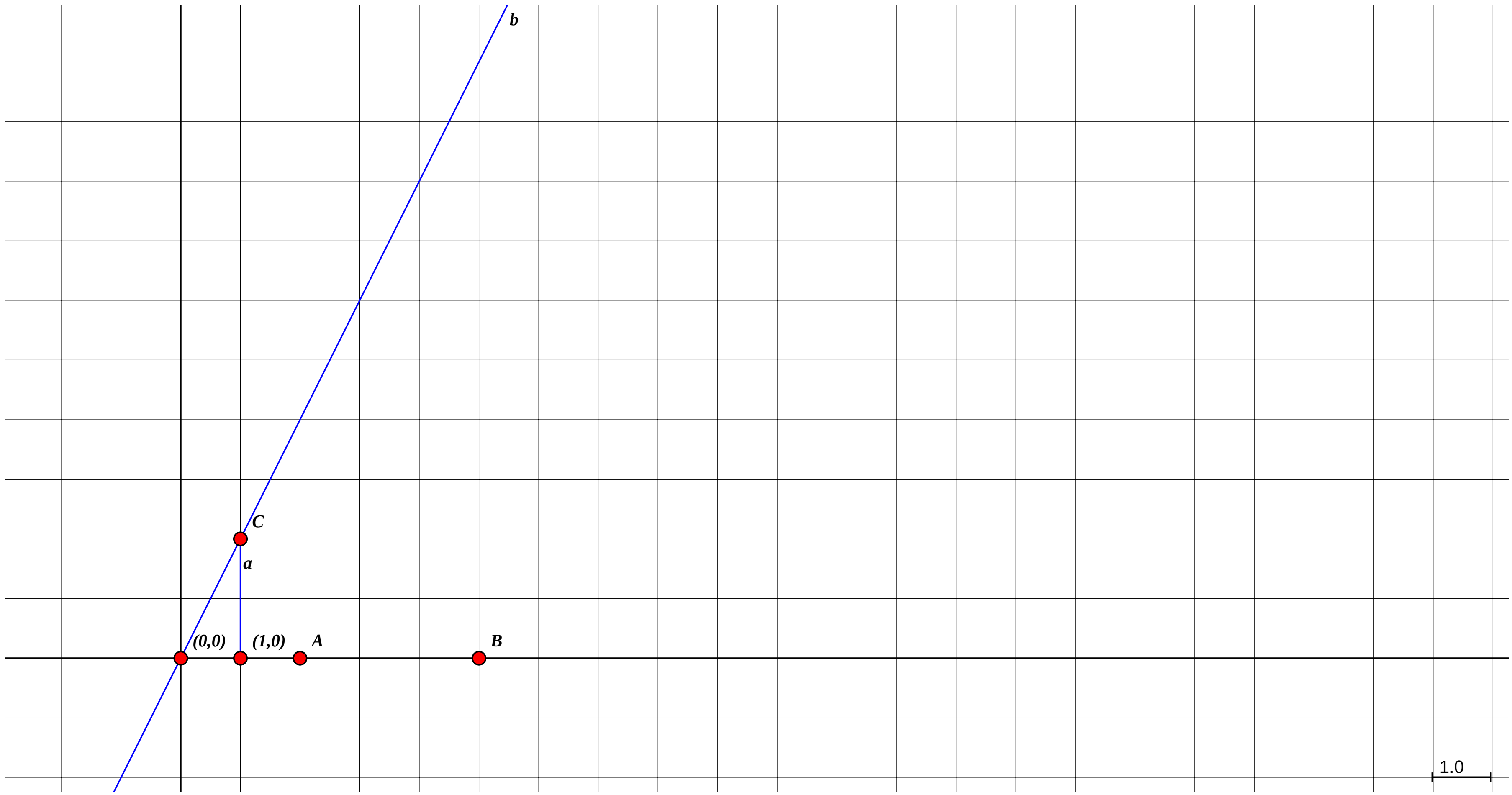
Beweis für Multiplikation (Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass α und β beide positiv sind.)



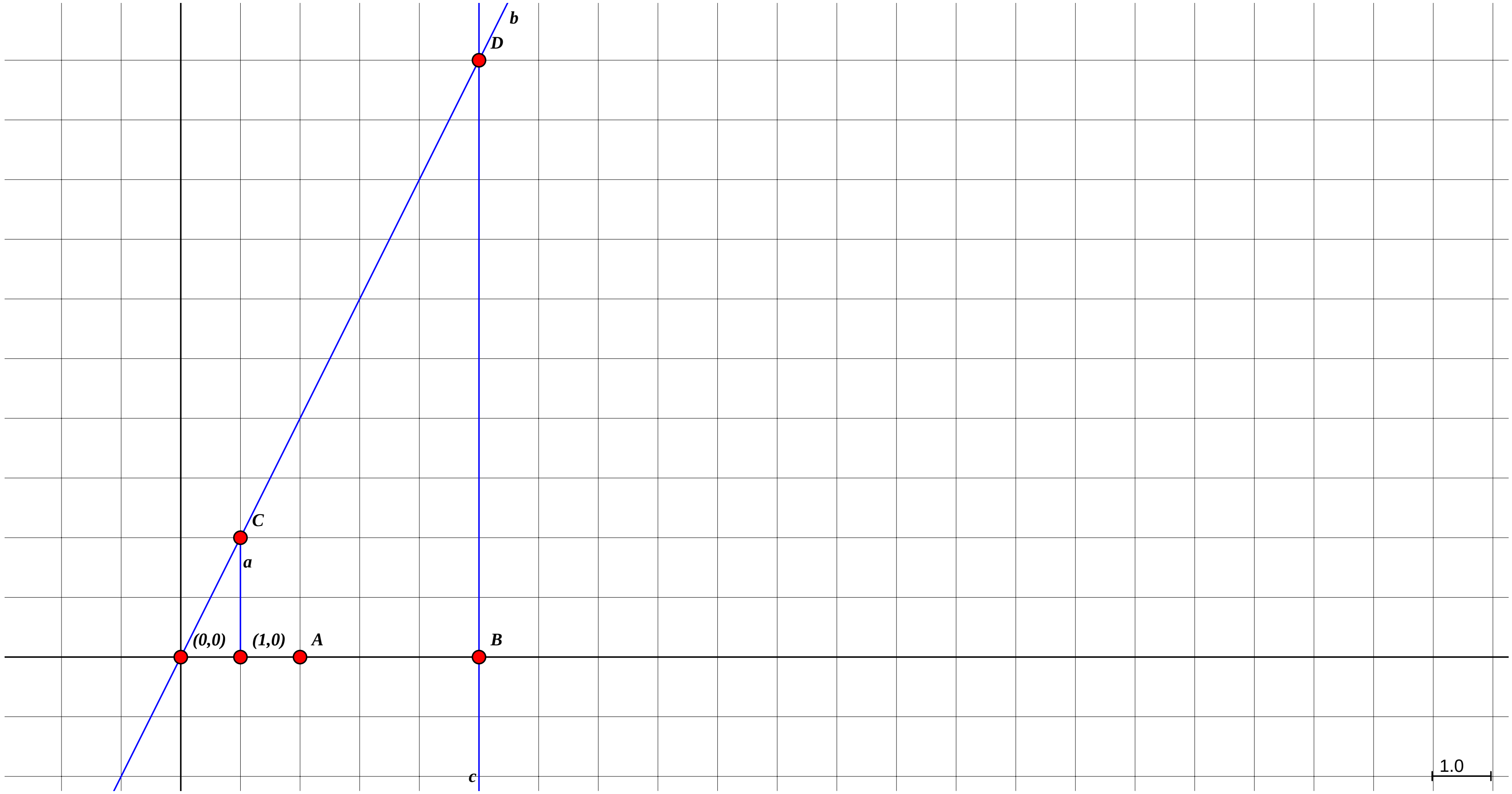
Es sei $\alpha = |\overline{(0,0)A}|$ und $\beta = |\overline{(0,0)B}|$. Gesucht: $\alpha \cdot \beta$.



Wir tragen über $(1, 0)$ eine Strecke a der Länge $|\overline{(0, 0)A}|$ ab.



Legen nun eine Gerade durch die Punkte $(0, 0)$ und C.



$$|\overline{BD}| = \alpha \cdot \beta$$

Frage: Wie lassen sich die konstruierbaren Punkte beschreiben? Welche reellen Zahlen können als Koordinaten konstruierbarer Punkte auftreten?

Geraden sind gegeben durch Gleichung $ax + by = c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ (nicht $a = b = 0$) d.h. $G = \{(x, y); ax + by = c\}$.

Beispiel: Gerade durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist gegeben durch

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Kreise sind gegeben durch Gleichung $(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2 = r^2$ (Mittelpunkt (x_M, y_M), Radius r).

Beispiel: Der Einheitskreis ist gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$.

I. Schnittpunkt zweier Geraden

Zwei (nicht-parallele) Geraden $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ schneiden sich in $(\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1})$.

II. Schnittpunkt(e) einer Gerade und eines Kreises

Gegeben seien eine Gerade $ax + y = c$ und ein Kreis $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Liegt der Punkt (x_0, y_0) auf der Gerade und dem Kreis, so gilt

$$r^2 = (x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 = (x_0 - x_M)^2 + (-ax_0 + c - y_M)^2,$$

d.h. wir erhalten eine quadratische Gleichung für x_0.

III. Schnittpunkt(e) zweier Kreise Ähnlich wie II.

Die Koordinaten eines neu konstruierten Punktes erfüllen eine quadratische (oder lineare) Gleichung, deren Koeffizienten aus Koordinaten bereits konstruierter Punkte gebildet sind.

Satz *Die Koordinaten eines konstruierbaren Punktes (ausgehend von (0,0) und (1,0)) sind Nullstellen eines Polynoms* $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ *mit Koeffizienten* $a_i \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$.

Beispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $(x-a)^2 = b$, $a \in \mathbb{Q}$, $b = \sqrt{b'}$, $b' \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Dann ist $(x-a)^4 - b^2 = 0$, und wir erhalten eine Gleichung für x mit rationalen Koeffizienten.

Wir sind also auf den folgenden Begriff gestossen, der eine zentrale Rolle in der Algebra spielt:

Definition: Eine reelle (oder komplexe) Zahl α heißt *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines Polynoms ($\neq 0$) mit rationalen Zahlen als Koeffizienten ist. Anderenfalls, d.h. falls es kein Polynom ($\neq 0$) mit rationalen Zahlen als Koeffizienten gibt, das α als Nullstelle hat, so nennt man α *transzendent*.

Folgerung zum Satz *Jede konstruierbare Zahl ist algebraisch.*

Zurück zur Quadratur des Kreises.

Ohne Einschränkung: Gegeben als Mittelpunkt der Punkt $(0,0)$, und als Punkt auf dem Kreis der Punkt $(1,0)$. Der zugehörige Kreis hat Radius 1 und Flächeninhalt π.

Wir müssen also ein Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ konstruieren.

Um die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass die Zahl $\sqrt{\pi}$ nicht konstruierbar ist, z.B. indem man zeigt, dass $\sqrt{\pi}$ transzendent ist.

Joseph Liouville (1809 – 1882)

Satz (Liouville, 1844) *Es gibt transzendente Zahlen.*

Charles Hermite (1822 – 1901)

Satz (Hermite, 1873) *Die Zahl e ist transzendent.*

Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939)

Satz (Lindemann, 1882) *Die Zahl π ist transzendent.*

Hieraus folgt, dass $\sqrt{\pi}$ nicht konstruierbar ist und somit die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises.

Lindemann bewies sogar folgenden Satz, der die beiden zuvor zitierten Ergebnisse umfasst und den man gerne Hermite und Lindemann zuschreibt, da Letzterer wesentlich auf Hermites Arbeit aufbaute:

Satz (Hermite-Lindemann, 1882) *Ist $\alpha \neq 0$ eine algebraische Zahl, so ist e^{α} transzendent.*

Der Beweis der Transzendenz von π benutzt immer die komplexen Zahlen, z.B. über die schöne Identität

$$e^{i\pi} = -1.$$

Wir beweisen den folgenden, einfacheren

Satz (Lambert, 1761) $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, insbesondere $\pi, \sqrt{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis (nach I. Niven, 1947).

Angenommen, $\pi^2 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$.

Sei $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$, und sei

$$\begin{aligned} F(x) \quad &:= \quad b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\pi^2)^{n-k} f^{(2k)}(x) \\ &= \quad b^n \Big[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots \\ &\qquad \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \Big] \end{aligned}$$

Dann sind $F(0)$ und $F(1)$ ganze Zahlen.

Sei nun $G(x) = F'(x)\sin\pi x - \pi F(x)\cos\pi x$.

Dann ist

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F''(x) + \pi^2 F(x))\sin\pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x)\sin\pi x = \pi^2 a^n f(x)\sin\pi x \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} I &:= \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x \; dx \\ &= \pi\left(\frac{1}{\pi}F(1) + \frac{1}{\pi}F(0)\right) = F(0) + F(1) \end{aligned}$$

eine ganze Zahl.

Andererseits gilt für alle x mit $0 < x < 1$:

- $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$
- $0 < \sin \pi x \leq 1$.

Dies liefert uns für $I = \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \; dx$

$$0 < I < \frac{a^n \pi}{n!} < 1$$

I ist also eine ganze Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt. Da eine solche Zahl nicht existiert, muss unsere anfängliche Annahme, dass π^2 rational ist, falsch sein.

q.e.d.

Andere unlösbare Konstruktionsprobleme

- Verdoppelung des Würfels
- Konstruktion eines regelmässigen Siebenecks