# מבנים אלגבריים 2 – תרגיל מס' 11

1. יהי $p>2$ ראשוני.

א. יהי $P$ מצולע במישור בעל $p$ צלעות באורכים רציונליים שכל זוויותיו שוות (ל- $2\pi/p$).
הוכיחו כי $P$ הוא מצולע משוכלל, כלומר שכל צלעותיו שוות אורך.

*רמז*: התבוננו בהרחבה $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$ כאשר $\zeta$ שורש יחידה $p$-י.

ב. הראו כי הטענה ב-א' איננה נכונה אם לא מניחים ש- $p$ ראשוני.

ג. הראו כי הטענה ב-א' איננה נכונה אם לא מניחים של- $P$ צלעות באורכים רציונליים.

2. יהי $p>2$ ראשוני. לכל $a$ שלם נגדיר את <u>הסמל של לז'נדר</u> ע"י:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}0 & p|a\\ 1 & a \bmod p\in\{x^2 : x\in\mathbf{F}_p^\times\}\\ -1 & a \bmod p\notin\{x^2 : x\in\mathbf{F}_p^\times\}\end{cases}$$

א. הראו כי לכל $a,b$ מתקיים $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

ב. יהי $\zeta=e^{2\pi i/p}$ שורש יחידה $p$, ויהי $S=\sum_{a=0}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)\zeta^a$ ( $S$ מכונה <u>סכום גאוס</u>).

הוכיחו כי $S^2=\left(\frac{-1}{p}\right)p$.

*רמז*: כתבו $S^2=(\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)\zeta^a)(\sum_{b=1}^{p-1}\left(\frac{b}{p}\right)\zeta^b)=(\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)\zeta^a)(\sum_{c=1}^{p-1}\left(\frac{ac}{p}\right)\zeta^{ac})$ (מדוע ניתן לעשות זאת?) והשתמשו בסעיף א' ובכך ש- $1+\zeta^i+\zeta^{2i}+\ldots+\zeta^{i(p-1)}=\begin{cases}p & i=0\\ 0 & 0<i<p\end{cases}$.

ג. הסיקו כי ההרחבה הציקלוטומית $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$ מכילה הרחבה ריבועית מהצורה $\mathbf{Q}(\sqrt{\pm p})/\mathbf{Q}$ (מהו הסימן?), וכי זו ההרחבה הריבועית היחידה בתוך $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$.

ד. הראו כי כל הרחבה ריבועית של $\mathbf{Q}$ מוכלת בהרחבה ציקלוטומית מתאימה.