Mithilfe der Determinante kann man auch explizit eine (für große n sehr aufwendige) Formel für das Inverse einer Matrix angeben:

<u>Thm</u> (Cramer)

Für $A \in Mat(n,n)$ mit $\det(A) \neq 0$ gilt

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji}^{+})$$

wo wieder $A_{ij}^{+} \in Mat(n-1,n-1)$ diejenige Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Dieser Satz folgt direkt aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz (siehe unten).

<u>Bsp</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachweis:

Es gilt
$$(-1)^{i+j}\det\left(A^{+}_{ij}\right) = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array}$$
nach Laplace.

Ist dann b_i die i-te Spalte von A^{-1}, so gilt für
$$B_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \mid & & & \\ & \ddots & & \mid & & & \\ 0 & & 1 & b_i & & 0 & \\ & & 0 & \mid & 1 & & \\ & & & \mid & & \ddots & \\ & & & \mid & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j\text{-te Spalte} \end{array}$$
dass $\det(B_{ij}) = b_{ji}$, wieder nach Laplace.

Es folgt
$$A \cdot B_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j}\det\left(A^{+}_{ij}\right) = \det\left(A \cdot B_{ij}\right) &= \det(A)\cdot \det(B_{ij}) \\ &= \det(A)\cdot b_{ji} \\ &= \det(A)\cdot \left(A^{-1}\right)_{ji} \end{aligned}$$
⌟