Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2016**
A. Mihatsch

Algebra I

3. Übungsblatt

Auf Wunsch der Fachschaft: Die Fachschaft Mathematik feiert am 12.05 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 9.05., Di. 10.05. und Mi. 11.05. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de

Aufgabe 1:

Sei R ein noetherscher Ring. Zeige, dass der Potenzreihenring $R[[X]]$ in einer Variablen wieder noethersch ist.
Tip: Führe den Beweis analog zum Hilbertschen Basissatz. Ist $\mathfrak{a} \subset R[[X]]$ ein Ideal, so betrachte diesmal das R-Ideal $I := \{r \in R \mid \text{es ex. ein } f \in \mathfrak{a} \text{ mit } f = rX^d + \sum_{i>d}^{\infty} r_i X^i\}$.

Aufgabe 2:

Seien M und N zyklische $\mathbb{Z}$-Moduln (d.h. sie sind von einem Element erzeugt). Bestimme

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} N \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N).$$

Aufgabe 3:

Sei R ein Ring, und seien $\{M_i\}_{i \in I}$ und N Moduln über R.
i) Zeige, dass es einen Isomorphismus

$$f : (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$

gibt, der eindeutig durch die Eigenschaft

$$f((m_i)_{i \in I} \otimes n) = (m_i \otimes n)_{i \in I} \qquad \forall\, m_i \in M_i,\ n \in N$$

bestimmt ist.
ii) Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Zeige, dass die Moduln $M/\mathfrak{a}M$ und $(R/\mathfrak{a}) \otimes_R M$ zueinander isomorph sind.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Sei $k = R/\mathfrak{m}$ der entsprechende Restklassenkörper. Zeige folgende Aussagen.
i) Der R-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist auf natürliche Weise ein k-Vektorraum.
ii) Ist $\mathfrak{m}$ als R-Modul flach, so ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$.
iii) Sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring in 2 Variablen über einem Körper K. Das Ideal (X, Y) ist torsionsfrei, aber nicht flach.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 02. Mai 2016.