

Unendlichkeit und absolute Unentscheidbarkeit

Paul Cohen 1934-2007

Peter Koepke, Mathematisches Institut

Dies Academicus

Bonn, 23. Mai 2007



Paul Joseph Cohen

2. April 1934 geboren in Long Branch, New Jersey

1950 Studium New York und Chicago

1958 PhD

Topics in the Theory of Uniqueness of Trigonometric Series

1959 Institute for Advanced Studies, 1961 Stanford

1963 *The Independence of the Continuum Hypothesis*

1966 Fields Medal

23. März 2007 gestorben in Stanford

Paul Joseph Cohen

2. April 1934 geboren in Long Branch, New Jersey

1950 Studium New York und Chicago

1958 PhD

Topics in the Theory of Uniqueness of Trigonometric Series

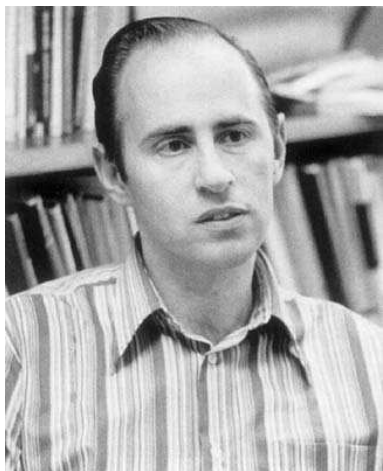
1959 Institute for Advanced Studies, 1961 Stanford

1963 *The Independence of the Continuum Hypothesis*

1966 Fields Medal

23. März 2007 gestorben in Stanford

Paul Joseph Cohen



Die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese



und $2^{\aleph_0} = \aleph_1$



und $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$

Die Theorie der unendlichen Mengen

Bernhard Bolzano (1851), Georg Cantor (1873),
Richard Dedekind (1872)

$1, 2, 3, \dots$

ist die Menge der gewöhnlichen *natürlichen Zahlen*.

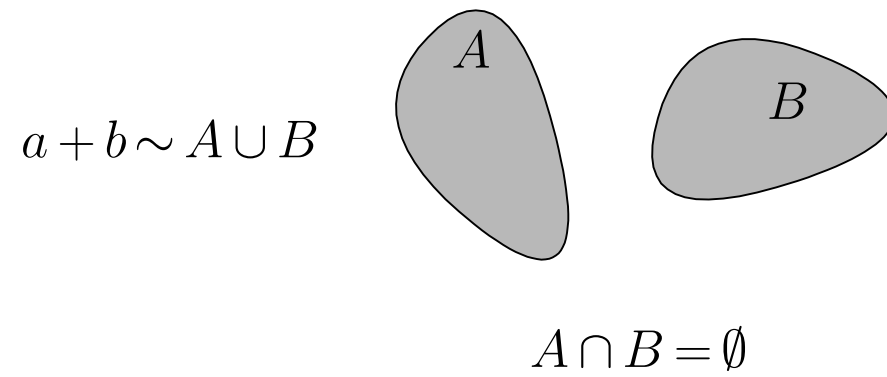
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Anzahlen und Kardinalitäten von Mengen

1 \leftrightarrow Montag
2 \leftrightarrow Dienstag
3 \leftrightarrow Mittwoch
⋮
7 \leftrightarrow Sonntag

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \leftrightarrow \{\text{Montag, Dienstag, \dots, Sonntag}\}$

Rechenoperationen



Die Menge der Quadratzahlen hat die Kardinalität \aleph_0

Galileo Galilei, Unterredungen ... (1638)

1, 4, 9, 16, ...

$$1 \leftrightarrow 1$$

$$2 \leftrightarrow 4$$

$$3 \leftrightarrow 9$$

$$4 \leftrightarrow 16$$

$$\vdots \leftrightarrow \vdots$$

\aleph_0

Abzählbar unendliche Mengen

- die Menge der geraden Zahlen
- die Menge der ungeraden Zahlen
- die Menge der Primzahlen
- die Menge der Brüche der Form $\frac{a}{b}$

Rechnen mit unendlichen Kardinalzahlen

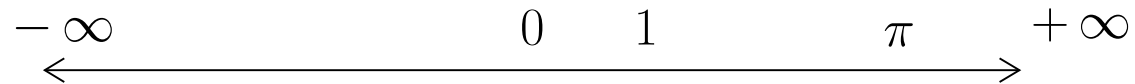
Sei $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. Dann ist

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}.$$

$A \cup B$ hat die Kardinalität \aleph_0 , $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$$\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow a_1 \\ 2 \leftrightarrow b_1 \\ 3 \leftrightarrow a_2 \\ 4 \leftrightarrow b_2 \\ \vdots \leftrightarrow \vdots \end{array}$$

Wieviele Elemente hat die Zahlengerade \mathbb{R} ?



Unendlich lange Dezimalzahlen der Gestalt

$$\sqrt{2} = 1,41421356237\dots$$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

...

Wieviele unendliche Dezimalzahlen gibt es?

7. Dezember 1873, Brief von Cantor an Dedekind

... Man nehme an, es könnten alle positiven Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$$

...; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schließlich zum Grund gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen läßt.

Beweis des Satzes von Cantor

Widerspruchsbeweis: Angenommen $\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$

wäre eine Aufzählung der Menge der Dezimalzahlen.

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
\vdots									

Diagonalargument

$r_1 = 3,$	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 = 1,$	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 = 0,$	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 = 102,$	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 = -5,$	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 = 8,$	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 = 0,$	7	6	5	4	3	2	1	...
\vdots								

Diagonalargument

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
\vdots									
$z =$	0,	2	2	2	1	2	1	2	...

Diagonalargument

Weil sich die Zahl z in der n -ten Dezimalstelle von der n -ten reellen Zahl r_n der Aufzählung unterscheidet, kommt z in der Aufzählung nicht vor. Das heißt aber, dass

$$\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

keine vollständige Aufzählung der Menge der Dezimalzahlen war. Widerspruch.

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

$$z = 0,2221212\dots$$

Sukzessive Konstruktion mit Approximationen

$$p_1 = 0,2$$

$$p_2 = 0,22$$

$$p_3 = 0,222$$

\vdots

jede Verlängerung von p_1 ist ungleich r_1 ;

jede Verlängerung von p_2 ist ungleich r_2 ; usw.

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

Im n -ten Schritt der Konstruktion wird n -te Forderung („ $z \neq r_n$ “) dadurch sichergestellt, dass

$p_n \in D_n = \{p \mid p \text{ is eine endliche Dezimalzahl und jede Verlängerung von } p \text{ ist ungleich } r_n\}$.

Die Diagonalzahl z ist Verlängerung aller Approximationen und ist daher ungleich r_1, r_2, r_3, \dots .

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
	\vdots								
$p_1 =$	0,	2							

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
	\vdots								
$p_2 =$	0,	2	2						

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
	\vdots								
$p_3 =$	0,	2	2	2					

Schrittweise Konstruktion der Diagonalzahl

$r_1 =$	3,	1	4	1	5	9	2	6	...
$r_2 =$	1,	4	1	4	2	1	3	5	...
$r_3 =$	0,	3	3	3	3	3	3	3	...
$r_4 =$	102,	6	3	9	2	2	7	2	...
$r_5 =$	-5,	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_6 =$	8,	3	6	6	2	1	2	8	...
$r_7 =$	0,	7	6	5	4	3	2	1	...
	\vdots								
$p_4 =$	0,	2	2	2	1				

Erfüllung anderer Eigenschaften

Für eine geeignete Folge

$$D_1, D_2, D_3, \dots$$

von Mengen endlicher Approximationen bestimme eine allgemeine Diagonalmatrix z durch

$$\begin{array}{r} p_1 \in D_1 \\ p_2 \text{ ist Verlängerung von } p_1 \text{ und } p_2 \in D_2 \\ p_3 \text{ ist Verlängerung von } p_2 \text{ und } p_3 \in D_3 \\ \vdots \end{array}$$

Cantors Kardinalzahlen

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots < \aleph_{\aleph_0} < \dots$$

Jede unendliche Menge X besitzt eine dieser Kardinalitäten, *d.h.* es existiert eine wechselseitige Beziehung

$$X \leftrightarrow \aleph_i$$

Unendliche Rechenoperationen *für* Kardinalzahlen

$$\aleph_i + \aleph_j, \aleph_i \times \aleph_j \text{ und } \aleph_i^{\aleph_j}$$

Mengenlehre als Grundlegung der Mathematik

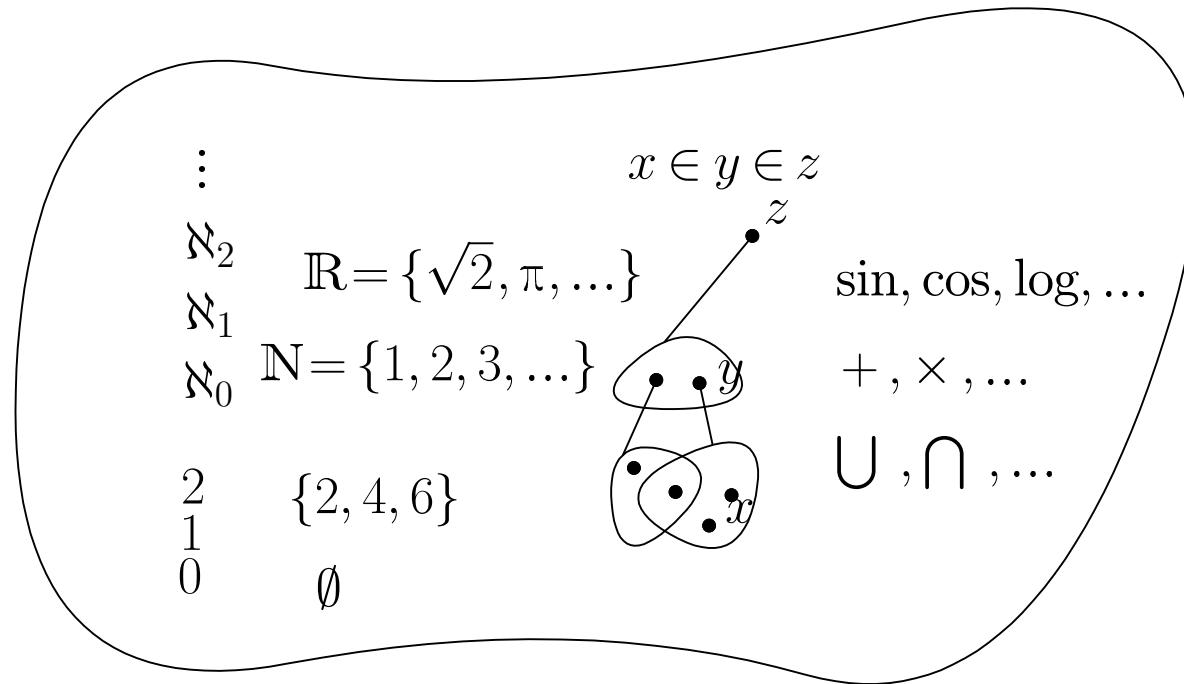
Mathematische Objekte sind Mengen:

der 3 – dimensionale Raum \mathbb{R}^3 ist die Menge aller Koordinatentripel (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{R}$,

z.B. ist eine Kugel K eine Teilmenge der Menge \mathbb{R}^3 :

$$K \subseteq \mathbb{R}^3$$

Mathematisches Universum = Mengenuniversum



Grundoperationen und Grundannahmen,
Zermelo-Fraenkelsche Axiome

Z.B. Paarmengenbildung

$$x, y \mapsto \{x, y\}$$

oder Vereinigung

$$x, y \mapsto x \cup y$$

Bildungsgesetze für Mengen sind in dem Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem ZFC festgehalten.

Die Cantorsche Kontinuumshypothese

Welche Kardinalität hat das Kontinuum \mathbb{R} :

$$\mathbb{R} \sim \aleph_i ?$$

Mit $\mathbb{R} \sim 2^{\aleph_0}$:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_i ?$$

Cantor formulierte 1878 die Hypothese, dass die Kardinalität der reellen Zahlen die kleinstmögliche überabzählbare Kardinalzahl sei:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Cantor - Die Vermessung des Unendlichen



Oper von Ingomar Grünauer

Uraufführung November 2007

Halle/Saale

Das erste Hilbertsche Problem (1900)



Cantors Problem von der
Mächtigkeit des Continuum:

Aus diesem Satz würde zugleich
folgen, daß das Continuum die
nächste Mächtigkeit über die
Mächtigkeit der abzählbaren
Mengen hinaus bildet.

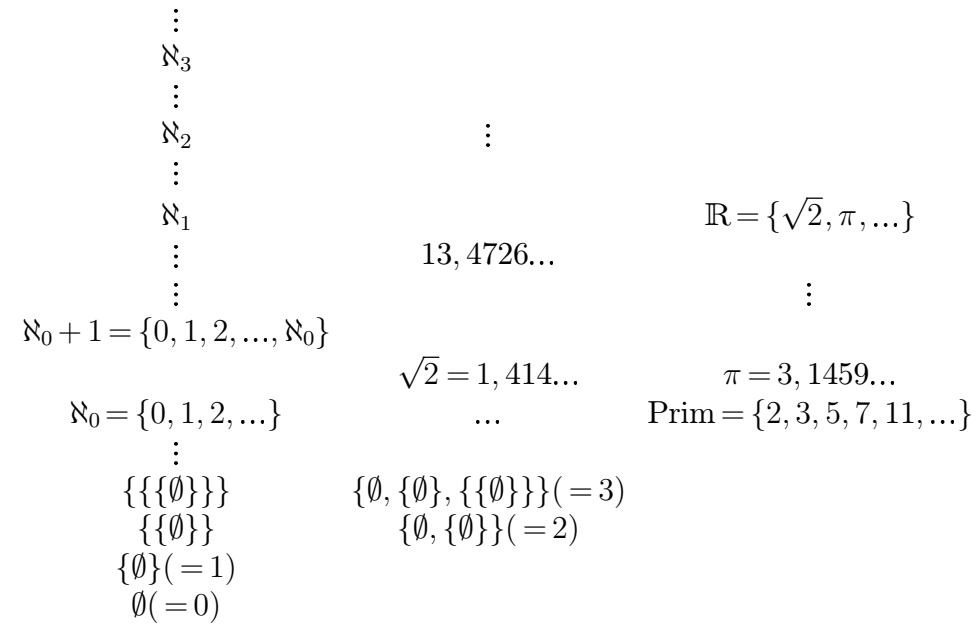
Gödels Modell, das die Kontinuumshypothese erfüllt (1938)



$$\text{und } 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Aus den ZFC-Axiomen lässt sich *nicht* $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ beweisen.

Gödel's Model, which satisfies the Continuum Hypothesis



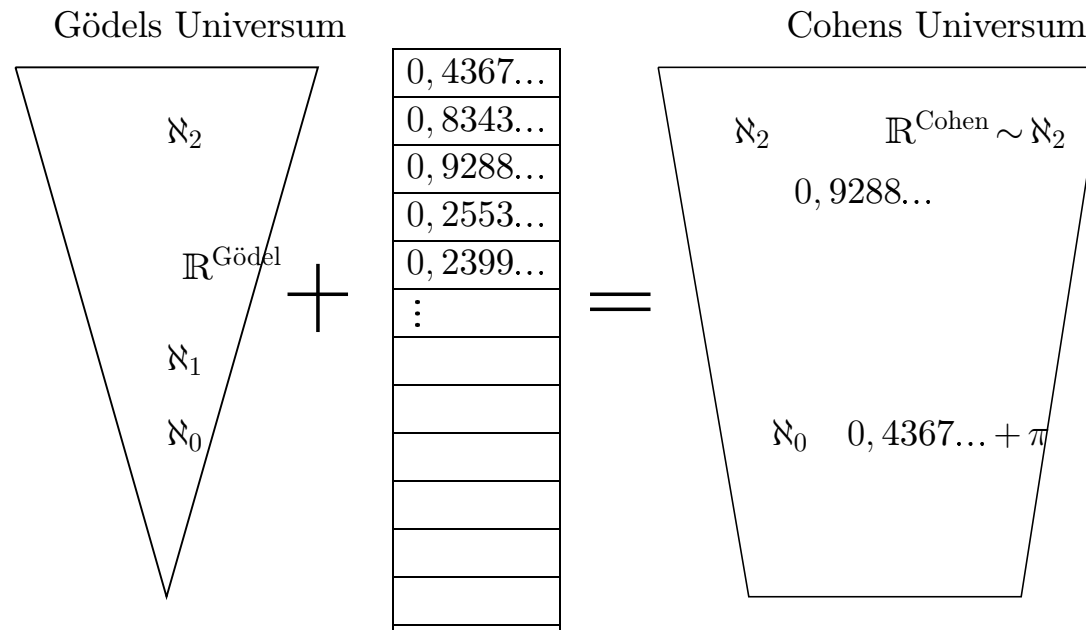
Cohens Modell, in dem die Kontinuumshypothese falsch ist

In *The Independence of the Continuum Hypothesis* konstruierte Cohen 1963 ein Modell, in dem $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ gilt.

Aus den ZFC-Axiomen lässt sich *nicht* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ beweisen.

Die Kontinuumshypothese ist unentscheidbar

Cohens Modell, in dem die Kontinuumshypothese falsch ist



Verallgemeinerte Diagonalkonstruktion

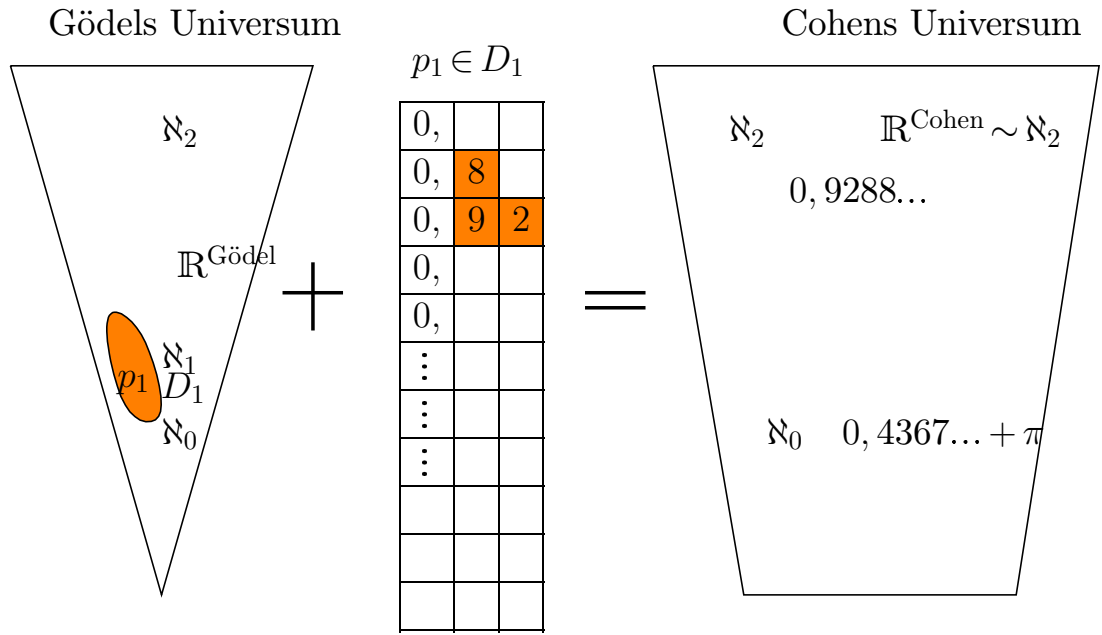
Die Liste $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}_2}$ wird in abzählbar vielen Schritten p_t approximiert, zu jedem Zeitpunkt sind endlich viele Nachkommastellen von endlich vielen Zahlen z_i festgelegt. Beim Schritt

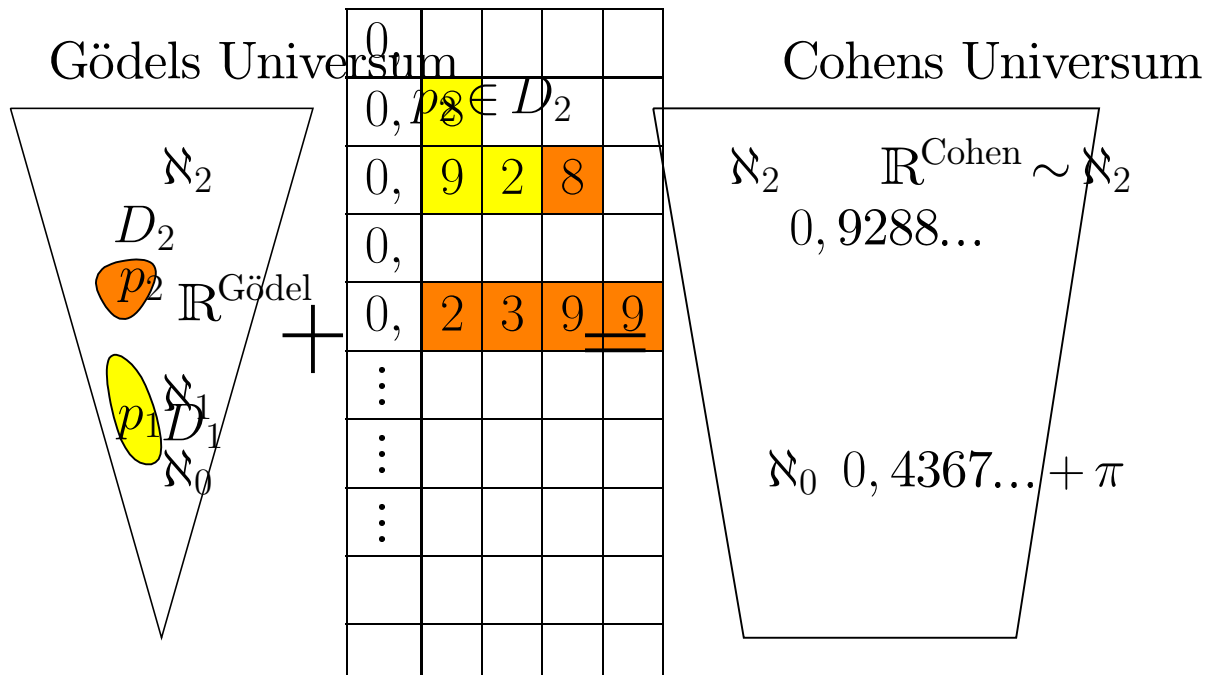
$$p_t \rightsquigarrow p_{t+1}$$

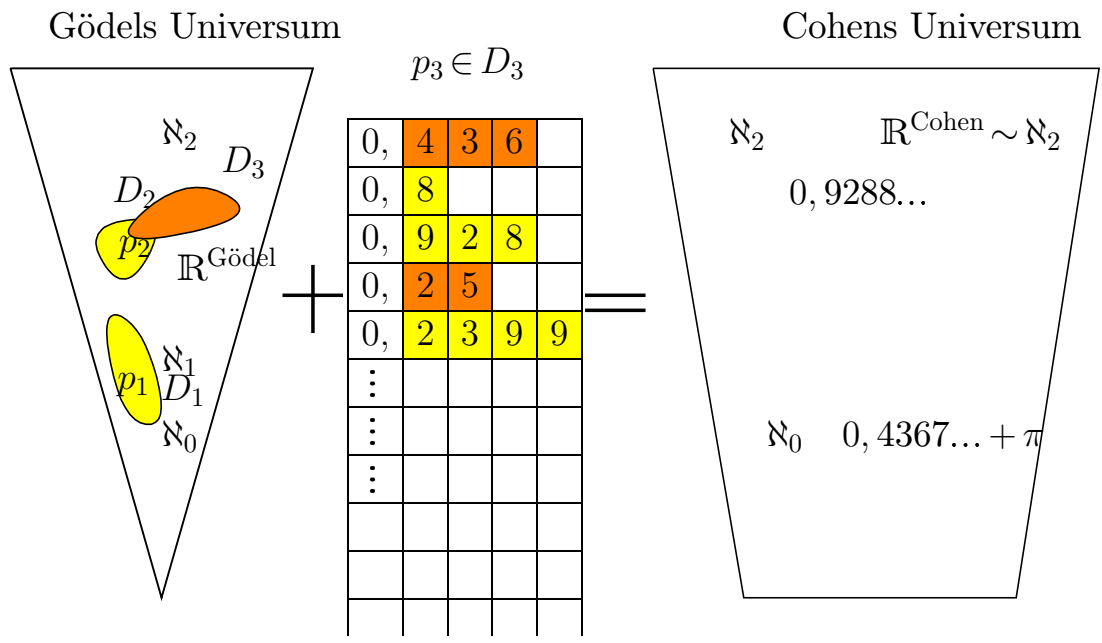
wird nach Möglichkeit folgende Eigenschaft erfüllt

$$p_{t+1} \in D_{t+1}$$

wobei $\{D_1, D_2, D_3, \dots\}$ das Gödelsche Universum ist.







Die z_i sind vollständig definiert

Die Menge

$D = \{p \mid p \text{ ist eine Approximation, bei der die } l\text{-te Dezimalstelle für die } i\text{-te Zahl festgelegt ist}\}$

ist eine Menge im Gödelschen Universum, etwa $D = D_n$. Nach der Konstruktionsvorschrift ist $p_n \in D$. Dadurch ist die l -te Dezimalstelle von z_i hinter dem Komma bestimmt.

Die z_i sind paarweise verschieden

Seien $i, j \in \mathbb{N}_2$ und $i \neq j$. Die Menge

$D' = \{p \mid \text{es gibt ein } l, \text{ so dass } p \text{ bestimmt, dass die } l\text{-te Stelle von } z_i = 1 \text{ und die } l\text{-te Stelle von } z_j = 2 \text{ ist}\}$

ist eine Menge im Gödelschen Universum, etwa $D' = D_m$. Nach der Konstruktionsvorschrift ist $p_m \in D'$. Diese Approximation p_m „erzwingt“, dass $z_i \neq z_j$.

Die Erzwingungsrelation

p erzwingt „nicht A “ genau dann, wenn es *keine* p erweiternde Approximation q gibt, welche A erzwingt.

Diese Aussage wird gemeinsam mit der Folgenden bewiesen:

die generische Liste hat eine Eigenschaft A genau dann, wenn in der Konstruktion der Liste ein p_n vorkommt, welches A erzwingt.

Axiomatische Mengenlehre

- „Paul Cohen: “The notion of a set is too vague for the continuum hypothesis to have a positive or negative answer.”
- Spektrum mathematischer Universen mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften
- Gödelsche Methode der Inneren Modelle
- Cohensche Forcing- oder Erzwingungsmethode

Danke!