Differentialgeometrie I

Hinweis zur Linearen Algebra: Für jede *symmetrische* bilineare Abbildung B zwischen Vektorräumen gilt: $B(v{+}w, v{+}w) - B(v{-}w, v{-}w) = 4B(v,w)$, $\quad B(v{+}w, v{+}w) - B(v,v) - B(w,w) = B(v,w)$ (sog. Polarisierungsidentität). Aus diesem Grund werden häufig nur die Werte für gleiche Argumente angegeben, z.B. für Riemannsche Skalarprodukte nur $g(\dot c, \dot c)$. Oft genügt es, Behauptungen nur für $B(v,v)$ ("auf der Diagonalen") zu beweisen.

Aufgabe 8.1 (Geodätische auf Rotationsflächen)

Eine Kurve $u \mapsto (r,h)$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist (es gilt also $r'^2 + h'^2 = 1$), definiert eine
Rotationsfläche $F : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ durch $F(u,v) = (r(u)\cos v,\ r(u)\sin v,\ h(u))$.

Wir hatten in 7.1 bereits berechnet (was ich hier als **Formelsammlung** wiederhole):
Die Normalenabbildung $N(u,v) = (h'(u)\cos(v),\ h'(u)\sin(v),\ -r'(u))$,
die Ableitung $TF = (\frac{\partial}{\partial u}F,\ \frac{\partial}{\partial v}F)$ (zwei Spaltenvektoren in der Jacobi-Matrix),
die Riemannsche Metrik (z.B. für $\dot c(t) = (\dot u(t), \dot v(t))$): $g(\dot c(t),\ \dot c(t)) = \dot u(t)^2 + r(u(t))^2 \dot v(t)^2$.
Für die zweite Ableitung genügt es ebenfalls, die Werte auf einer Basis zu kennen, also $\{\frac{\partial^2}{\partial u^2}F, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}F, \frac{\partial^2}{\partial v^2}F\}$. Wegen $r'r'' = -h'h''$ ist $\frac{\partial^2}{\partial u^2}F$ normal, also $\Gamma(\binom{1}{0}, \binom{1}{0}) = 0$;
ferner: $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}F = r'/r \frac{\partial}{\partial v}F$ gibt $\Gamma(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}) = \binom{0}{r'/r}$;
schließlich $(\frac{\partial^2}{\partial v^2}F)^{tang} = -rr' \frac{\partial}{\partial u}F$, also $\Gamma(\binom{0}{1}, \binom{0}{1}) = \binom{-rr'}{0}$.

(a) Warum sind die *Meridiane* $u \mapsto F(u,v)$ geodätische Linien?

(b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der *Breitenkreise* $v \mapsto F(u,v)$.

(c) Berechne die Christoffelabbildung Γ noch einmal, diesmal über die erste Ableitung der Riemannschen Metrik. (Ich berechne für eine beliebige Kurve c meistens $\Gamma(\dot c, \dot c)$.)

(d) Der *vertikale Drehimpuls* einer mit der Bogenlänge(**!!**) parametrisierten Kurve $c(t)$ ist durch $I_3(t) = \langle F \circ c(t) \times \frac{d}{dt}(F \circ c)(t)\,,\ (0,0,1)\rangle = r(c(t))\cos\psi(t)$ gegeben (ψ Schnittwinkel mit Breitenkreis). (Auch: $I_3(t) = g(\binom{0}{1},\ \dot c(t))$, hier heißt $\binom{0}{1}$ "Rotationsvektorfeld".)
Zeigen Sie den *Satz von Clairaut*: c ist Geodätische genau dann, wenn I_3 konstant ist. Schneidet eine Geodätische also *einen* Breitenkreis mit einem bekannten Winkel, so kennt man den Schnittwinkel für *jeden* Breitenkreis.

(e) Folgern Sie aus (d) den *Sinussatz der sphärischen Geometrie* (auch wenn Sie (d) nicht bearbeitet haben), also:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

für ein Dreieck in $\mathbb{S}^2$, dessen Winkel α, β, γ den Seiten mit Länge a, b, c gegenüberliegen. Legen Sie dazu eine Ecke des Dreiecks auf die Drehachse und wenden Sie den Satz von Clairaut auf die gegenüberliegende (geodätische) Seite an.

Aufgabe 8.2 (Krümmungslinien auf Röhrenflächen)

Es sei $\{\dot{c}(t), v(t), w(t)\}$ ein begleitendes orthonormales Dreibein einer nach der Bogenlänge parametrisierten zweimal stetig differenzierbaren Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$.
Für kleines ε hat die **Röhre** $F_\varepsilon(t, \varphi) := c(t) + \varepsilon \cdot (\cos\varphi\, v(t) + \sin\varphi\, w(t))$ (vgl. Blatt 7, Bild) reguläre Parameterlinien $t \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ und $\varphi \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ (Kreise).

(a) Zeigen Sie, daß die Kreise geodätische Linien sind und daß sie Krümmungslinien sind.

(b) Zeigen Sie, daß die Parameterlinien genau dann für alle (t, φ) senkrecht aufeinander stehen, wenn die Differentialgleichungen $\dot{v}(t) = a(t)\dot{c}(t)$ und $\dot{w}(t) = b(t)\dot{c}(t)$ gelten für zwei Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$. (Vgl. 5.4 (b))

Aufgabe 8.3 (Krümmungsschranken für Kurven)

Es sei $c : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, deren Krümmung durch $|\kappa(t)| := |\ddot{c}(t)| \leq K$ beschränkt sei.

(a) Zeigen Sie, daß für die Bogenlänge l und die Sehnenlänge $s := |c(l) - c(0)| = \left|\int_0^l \dot{c}(t)dt\right|$ die (für kleine l interessante) Abschätzung $0 \leq l - s \leq \frac{K}{2} l^2$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie $l = |\int_0^l c'(0)dt|$.

(b) Welche Abschätzung gewinnen Sie aus a) für den Einheitskreis?

(c) Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ und ist $v \neq 0$, $|w| = 1$, so gilt $|\sin\angle(v, w)| \leq |v - w|$.

(d) Es sei $\varphi := \angle\big(c(l) - c(0), \dot{c}(0)\big) \in (-\pi, \pi]$ der Winkel zwischen Sehne und Tangente. Zeigen Sie die für hinreichend kleine $l > 0$ gültige Abschätzung $|\varphi| \leq \arcsin(\frac{K}{2} l)$.
Hinweis: Benutzen Sie (c) mit $v = \big(c(l) - c(0)\big)/l$.