Differentialgeometrie I

Aufgabe 7.1 (Parallelflächen von Rotationsflächen)

Wir bezeichnen zunächst die Standardkoordinaten einer Euklidischen Ebene mit r, z und betrachten eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(s) = (r(s), z(s))$, also mit $r'^2 + z'^2 = 1$. Diese Kurve ist Meridiankurve der parametrisierten Rotationsfläche

$$F(u,v) := (r(u) \cdot \cos v,\ r(u) \cdot \sin v,\ z(u)) \ \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

(a) Geben Sie mit Hilfe der Funktionen r', z' ein (parametrisiertes) Einheitsnormalenfeld $N(u,v)$ der Rotationsfläche an und beschreiben Sie die dazu gehörige Schar von Parallelflächen $F_\epsilon(u,v) := ??$.
(b) Berechnen Sie für parametrisiert gegebene Kurven $(u(t), v(t))$, wie sich die Länge der Bildkurven mit ϵ ändert, d.h., was ist

$$\frac{d}{d\epsilon}\left|\frac{d}{dt}F_\epsilon(u(t),v(t))\right|_{\epsilon=0} \Big/ \left|\frac{d}{dt}F_\epsilon(u(t),v(t))\right|_{\epsilon=0} ?$$

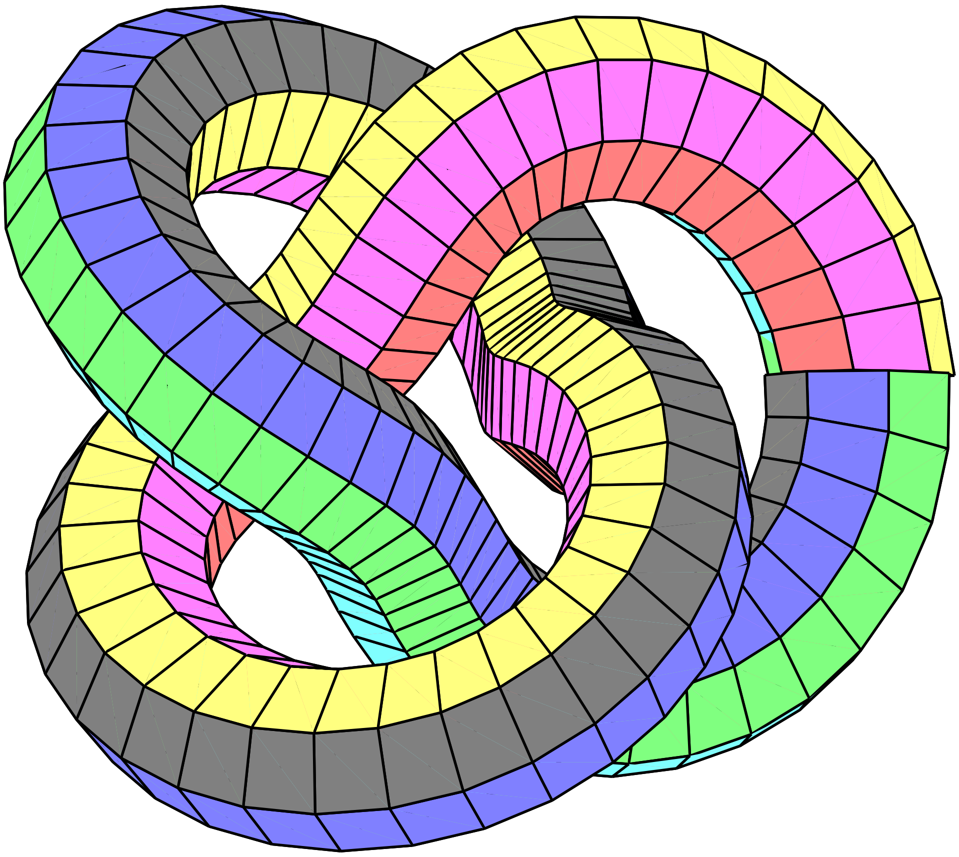
(c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit der Rotationsgeschwindigkeit der Normale. D.h., stellen Sie zuerst fest, daß $N(u,v)$ auch parametrisiertes Normalenfeld der Parallelflächen F_ϵ ist, berechnen Sie dann $\frac{d}{dt}N(u(t),v(t))$; was hat diese Ableitung mit (b) zu tun?
(d) Es seien $X, Y \in \mathbb{R}^2$ Vektoren im Definitionsbereich der Parametrisierung F. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik $g(X,Y) := \langle TF(X),\ TF(Y)\rangle$ aus den Funktionen $r'(u), z'(u)$ und aus den Vektorkomponenten X_1, X_2, Y_1, Y_2. Was ändert sich für F_ϵ?
(e) Differenzieren Sie F zweimal und bestimmen Sie die Christoffelabbildung $\Gamma(X,Y)$ aus der Definition $T^2F(X,Y)^{tang} = TF(\Gamma(X,Y))$.

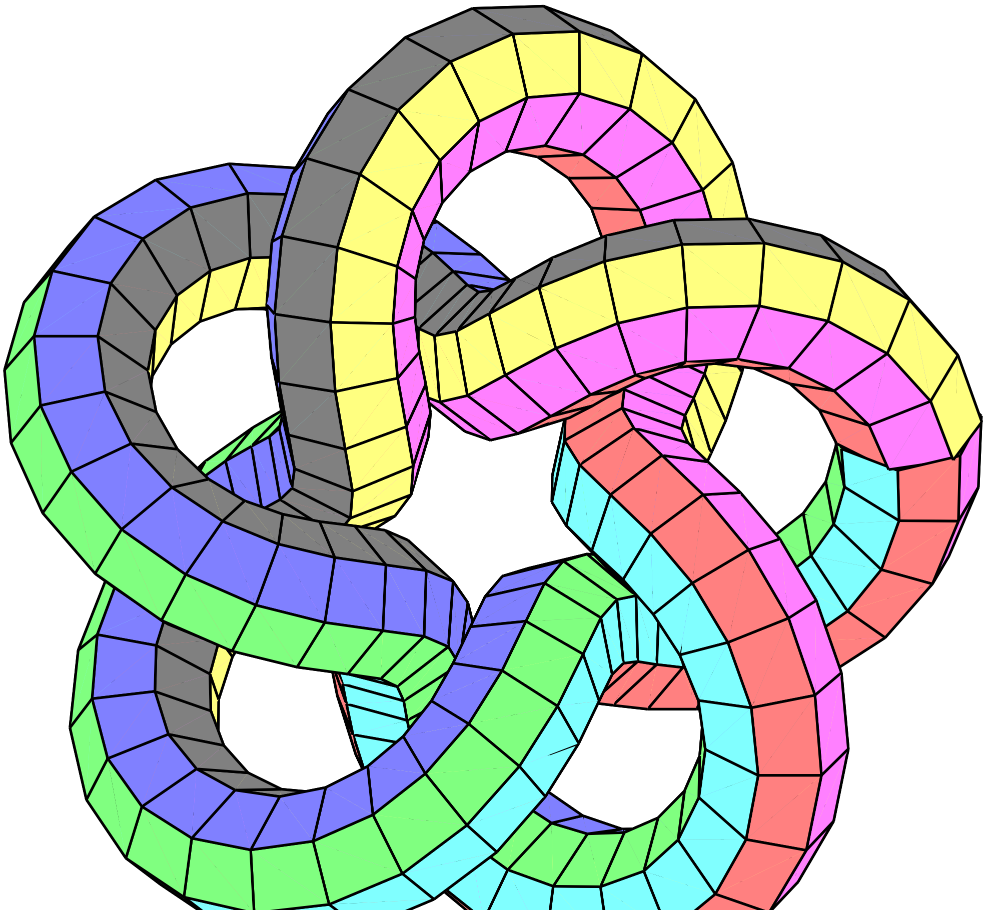
Aufgabe 7.2 (Abstandsfunktionen)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ heißt *Abstandsfunktion*, falls ihr Gradient die Länge 1 hat. Um das zu rechtfertigen, rechnen Sie nach, daß die Integralkurven von $\operatorname{grad} f$ mit der Geschwindigkeit 1 parametrisierte gerade Linien sind. Ist damit klar, daß die Niveaus von f Parallelflächen sind? (Tip: Symmetrie der zweiten Ableitung benutzen.)
Da wir als Einheitsnormalenfeld (auf allen Niveaus) $\operatorname{grad} f$ nehmen können, ist die Hesseform von f die zweite Fundamentalform der Niveauflächen. Kennen Sie zwei oder drei Abstandsfunktionen?

Aufgabe 7.3 (Krümmung für Niveauflächen und parametrisierte Flächen)

Die Tori der Aufgabe 5.3 sind in beiden Darstellungen (als Niveau und parametrisiert) gegeben. Berechnen Sie in beiden Beschreibungen die zweite Fundamentalform und überzeugen Sie sich, daß die Ergebnisse übereinstimmen. (In Aufg. 5.1 haben Sie die analoge Berechnung für Kurven durchgeführt.)





Röhren um Torusknoten

Gegeben ist eine Raumkurve c und längs dieser eine ON-Basis $\{c'(s), v_1(s), v_2(s)\}$.

Damit kann man die Röhren parametrisieren: $F(s,\varphi) := c(s) + \cos(\varphi)v_1(s) + \sin(\varphi)v_2(s)$.