WS 03/04, 21.10.2003 **Blatt 2** H. Karcher, A.Vdovina

Differentialgeometrie I

Mir gefällt das Buch *Christian Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter* besser als das von do Carmo. Aber es ist schwer, den Geschmack von Studenten zu beurteilen. Es wäre nett, wenn einige von Ihnen mal hinein sähen.

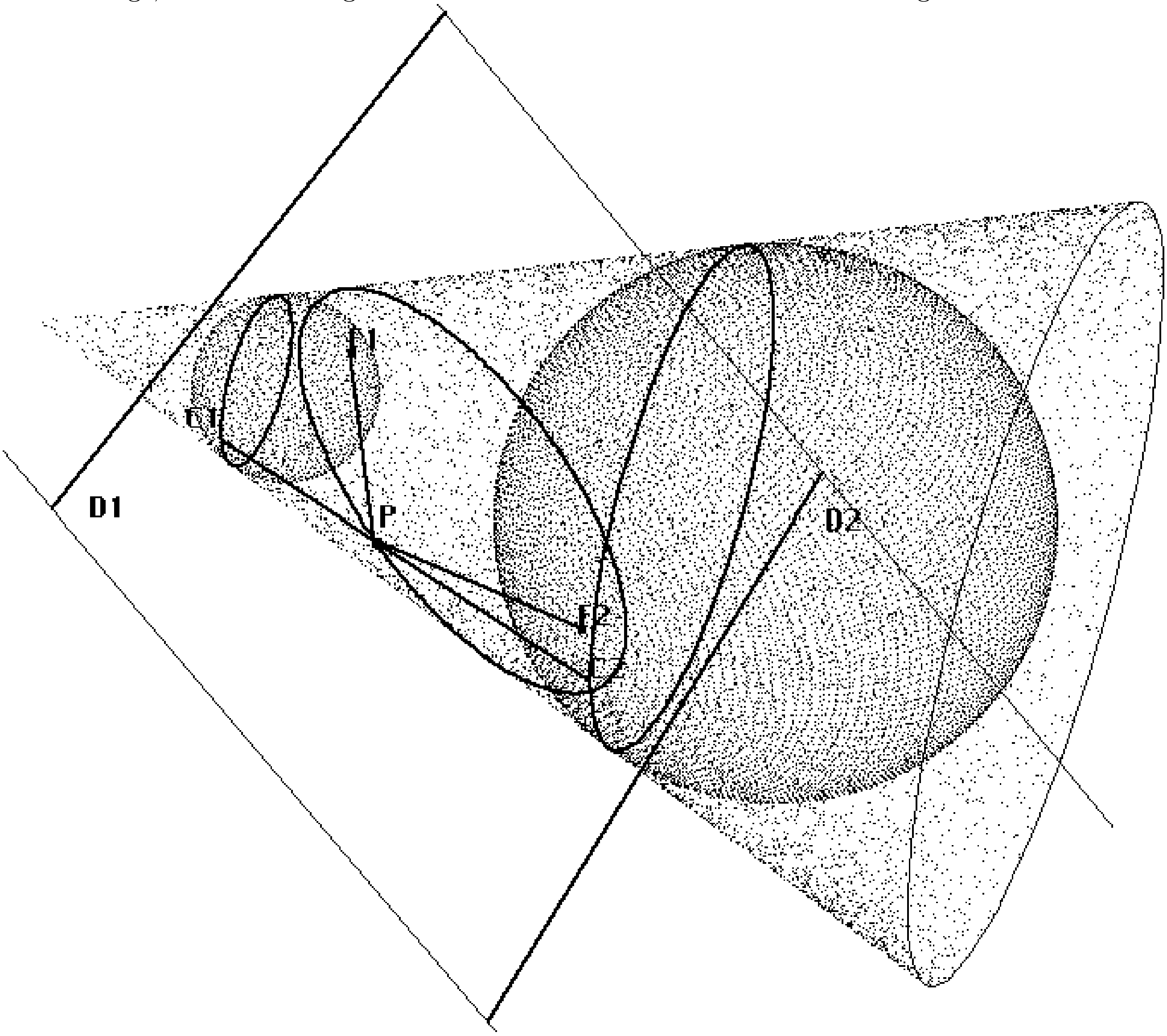
Aufgabe 2.1 (Mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kreise auf $\mathbb{S}^2$)
Aufgabe 1.1 soll auf der Sphäre nachgemacht werden. Geben Sie einen Kreis um den Nordpol vom sphärischen Radius r (geographisch: ϑ) an, der mit der konstanten Geschwindigkeit $v = |\dot{c}(t)|$ durchlaufen wird. Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{c}(t)$ und zerlegen Sie diese in Normalkomponente $\ddot{c}^{\perp}(t) := \langle c(t), \ddot{c}(t)\rangle \cdot c(t)$ und Tangentialkomponente $\ddot{c}^{tang}(t) = \ddot{c}(t) - \ddot{c}^{\perp}(t)$.
Für jede sphärische Kurve (also $\langle c(t), c(t)\rangle = 1$), die mit konstanter Geschwindigkeit $v = |\dot{c}(t)|$ durchlaufen wird, erhalten Sie dieselbe Normalkomponente der Beschleunigung wie eben für Kreise.
Berechnen Sie für sphärische Kreise aus v und $\ddot{c}^{tang}(t)$ den sphärischen Radius.

Aufgabe 2.2 (Drehungen um beliebige Achsen)
Es sei $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Es soll die Matrix einer Drehung um α mit Drehachse $\mathbb{R} \cdot d$ bestimmt werden.
Geben Sie die Matrix der Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel α an.
Was ist die Winkelhalbierende zwischen $(0, 0, 1)$ und d? Benutzen Sie Aufg 1.2, um d nach $(0, 0, 1)$ zu drehen.
Setzen Sie die gesuchte Matrix aus diesen Bausteinen zusammen.

Aufgabe 2.3 (Schmiegkreise (osculating circles**) und Parallelkurven)**
Gegeben sei eine (mindestens) zweimal stetig differenzierbare Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Für jedes $t \in [a, b]$ heißt der Kreis, der durch $c(t)$ geht und gleiche Geschwindigkeit $\dot{c}(t)$ und gleiche Beschleunigung $\ddot{c}(t)$ hat, der *Schmiegkreis* von c an der Stelle t. Dieser Kreis approximiert c bei t besser als jeder andere Kreis. (Später heißt dieser Kreis auch *Krümmungskreis.*) Der Radius heißt *Krümmungsradius.*
Betrachten Sie zu solch einer Kurve c ein Einheitsnormalenfeld $t \to n(t)$ und damit die Parallelkurven $c_\epsilon(t) = c(t) + \epsilon \cdot n(t)$. Es seien $r(t)$ die Krümmungsradien von c. Zeigen Sie, daß die Krümmungsradien der Parallelkurven (je nach Wahl von n) $r(t) + \epsilon$ oder $r(t) - \epsilon$ sind.

Aufgabe 2.4 (Schmiegkreise und Parallelkurven auf $\mathbb{S}^2$)
Für sphärische Kurven $c : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ übernehmen wir die Definition der Schmiegkreise aus Aufgabe 2.3. Mit Krümmungsradien sind jetzt die sphärischen Radien gemeint.
Zeigen Sie, daß in einer Schar sphärischer Parallelkurven $c_\epsilon(t) := \cos(\epsilon)c(t) + \sin(\epsilon)n(t)$ die Krümmungsradien ebenfalls $r(t) \pm \epsilon$ sind. ($\{n(t),\ \dot{c}(t)/|\dot{c}(t)|,\ c(t)\}$ bilden eine Orthonormalbasis.)

Die älteste Definition der Ellipsen benutzt die Summe der Abstände von den Brennpunkten. In Aufgabe 1.4 haben wir Ellipsen als affine Bilder von Kreisen kennen gelernt. Weiter treten sie auf als ebene Schnitte von Kreiskegeln. Die im folgenden illustrierte Idee von Dandelin zeigt, daß diese "Kegelschnitte" ebenfalls die Abstandssummen-Eigenschaft haben.



Die Kugeln von Dandelin zur Erklärung der Kegelschnitteigenschaften

Die Ellipsenebene berührt die beiden Kugeln in den Fokalpunkten F1, F2. Die beiden Tangenten vom Ellipsenpunkt P an die Kugel 1, also die Strecken $\overline{PF1}$ und $\overline{PC1}$, sind gleich lang. Dasselbe gilt für die Kugel 2. Daher ist die Summe der Abstände von P nach $F1$ und nach $F2$ gleich dem Abstand $C1C2$, also gleich dem Abstand der beiden Kreise, in denen die beiden Kugeln den Kegel berühren.