# Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

HINWEISE. *Um Ihnen den höherdimensionalen Hauptsatz erklären zu können, benötige ich die Differentialformen. Dazu ist weit wichtiger, daß Sie die entsprechenden Aufgaben bearbeiten als daß ich das Thema in der Vorlesung behandele. – Bevor wir zum Hauptsatz kommen, muß ich den Begriff Untermannigfaltigkeit erläutern. Vorher müssen Sie den Satz über implizite Funktionen beherrschen. Stellen Sie Fragen.*

## Aufgabe 6.1 Zurückziehen von Differentialformen

(a) Seien $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung und $\omega$ eine $k$-Form auf $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die jeweiligen Basen aus Aufgabe 5.4.(a) der Vektorräume der $k$-Formen. Damit hat $\omega$ eine Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Stellen Sie die Zurückziehung $(f^*\omega)|_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega|_{f(p)}(Tf|_p v_1, \ldots, Tf|_p v_k)$ in dieser Basis dar. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, daß die Zurückziehung einer geschlossenen Form, also $d\omega = 0$, geschlossen ist.

(b) Sei weiter auch $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie die Gleichung:

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$$

Man sagt auch, das Zurückziehen von Differentialformen entlang stetig differenzierbarer Funktionen ist ein kontravarianter Funktor.

(c) Zeigen Sie die folgende Gleichung:

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Man sagt auch, das Zurückziehen von Differentialformen entlang stetig differenzierbarer Funktionen ist verträglich mit der äußeren Ableitung.

(d) Rechnen Sie außerdem nach, daß folgende Gleichung gilt:

$$d \circ d = 0.$$

## Aufgabe 6.2 $L^1$-Norm und punktweise Konvergenz

Betrachten Sie für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \le j \le 2^i$ die Funktionen $f_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } (j-1)\,2^{-i} \le t \le j\,2^{-i} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(a) Stellen Sie die Funktionen $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, \ldots, f_{2,4}$ graphisch dar.

(b) Zeigen Sie, daß die Folge $(f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, \ldots, f_{2,4}, f_{3,1}, \ldots)$ in der mit Hüllreihen definierten Halbnorm $\|\ \|_1$ eine Cauchyfolge ist. (Wir sagen später: in $L^1(\mathbb{R})$ konvergiert.)

(c) Zeigen Sie, daß die in (b) definierte Folge auf $(0, 1)$ nirgends punktweise konvergiert.

(d) Geben Sie eine Teilfolge an, die auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert.

## Aufgabe 6.3 Nullmengen

Wir nennen ein Element einer Teilmenge eines topologischen Raumes einen *inneren Punkt* dieser Teilmenge, wenn es eine Umgebung dieses Punktes gibt, die ganz in der Teilmenge enthalten ist.

(a) Eine Nullmenge besitzt keine inneren Punkte.

(b) Für eine stetige Funktion $f$, deren $L^1$-Norm verschwindet, also $\|f\|_1 = 0$, gilt: $f = 0$.

(c) Die Menge aller reellen Zahlen in $[0, 1]$, die keine 5 in ihrer Dezimalbruchentwicklung haben, ist eine Nullmenge.

## Aufgabe 6.4 Rotationssymmetrie und Riemannsummen

*Die Physiker unter Ihnen würden vermutlich die folgenden Integrale "in Polarkoordinaten" ausrechnen. Das können wir ohne den Transformationssatz aus Kapitel 9 (oder wenigstens Satz 4, S.275) nicht rechtfertigen. Unser Satz über verallgemeinerte Riemannsummen genügt aber, das Ergebnis mit denselben eindimensionalen Integralen zu berechnen, die auch bei der Transformation auf Polarkoordinaten auftreten. Beachten Sie, wie sehr die Riemannsummen die Intuition unterstützen und bearbeiten Sie (b) sorgfältig.*

(a) Berechnen Sie mit dem Satz von Fubini die Fläche eines Kreises $K_R$ vom Radius $R$. Das innere Integral ist klar, übrig bleibt:

$$2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \xi^2}d\xi.$$

Sie können die Substitution $\xi = \sin t$ benutzen.

(b) Als nächstes sollen Sie das Trägheitsmoment

$$\int_{K_R} (x^2 + y^2)d(x, y)$$

der Kreisscheibe $K_R$ berechnen. Sei $0 = r_1 < ... < r_n = R$. Stellen Sie dazu verallgemeinerte Riemann-Summen für dieses Integral auf, indem Sie als Zerlegungsmengen die Ringflächen mit den Radien $r_j$ und $r_{j-1}$ wählen. Die Funktion $x^2 + y^2$ hat auf jedem Ring Werte zwischen $r_{j-1}^2$ und $r_j^2$, man kann also als Zwischenwert der Riemannsumme $((r_j + r_{j-1})/2)^2$ nehmen. *Beobachten Sie, daß die so erhaltene Summe als Riemannsumme eines eindimensionalen Integrals interpretiert werden kann.* Dieses kann explizit integriert werden.

(c) Berechnen Sie jetzt das Volumen der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R$ mit Hilfe des Satzes von Fubini, indem Sie die Kugel in horizontale Kreisflächen zerlegen und (a) benutzen.

(d) Berechnen Sie zum Schluß das Trägheitsmoment

$$\int_{B_R(0)} (x^2 + y^2)d(x, y, z)$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini, indem Sie das Trägheitsmoment der horizontalen Kreisfläche in der Höhe $z$ aus (b) benutzen und nach $z$ integrieren.