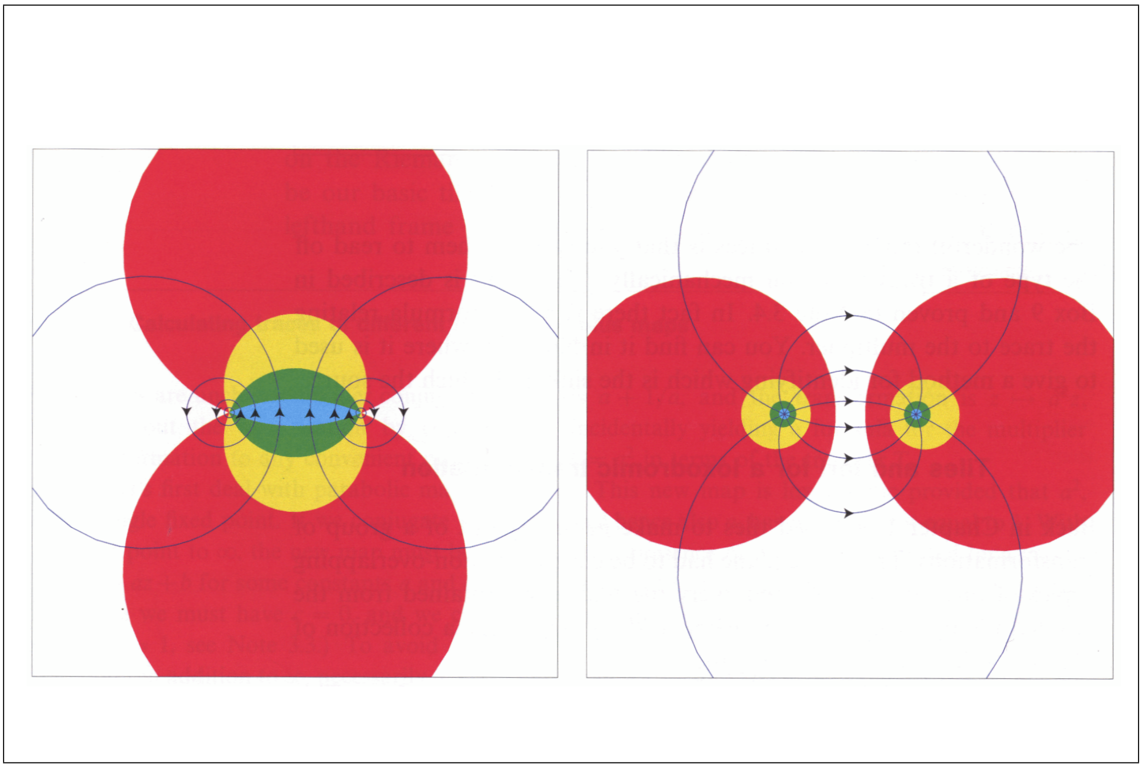
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 6 Abgabetermin : Mittwoch, 21.5.2014



Eine elliptische und eine hyperbolische Möbius-Transformation. Die farbigen Bereiche illustrieren die Potenzen der Abbildung: rot $= T(\text{gelb}) = T^2(\text{grün}) = T^3(\text{blau})$, wenn T die Möbius-Transformation bezeichnet. Aus D. Mumford, C. Series, D. Wright: *Indra's Pearls*, Cambridge 2002.

Aufgabe 1 (Konvergenzradius)

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^n$. Bestimme die Konvergenzradien der Reihen

$$\sum_n a_n z^{2n}, \quad \sum_n a_n^2 z^n, \quad \sum_n a_n^2 z^{2n}, \quad \sum_n \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Aufgabe 2 (Abelscher Grenzwertsatz)

Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ≥ 1 und die Reihe konvergiere für $z = 1$. Zeige, dass unter diesen Bedingungen für reelles x gilt:

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Folgere daraus die Identität

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

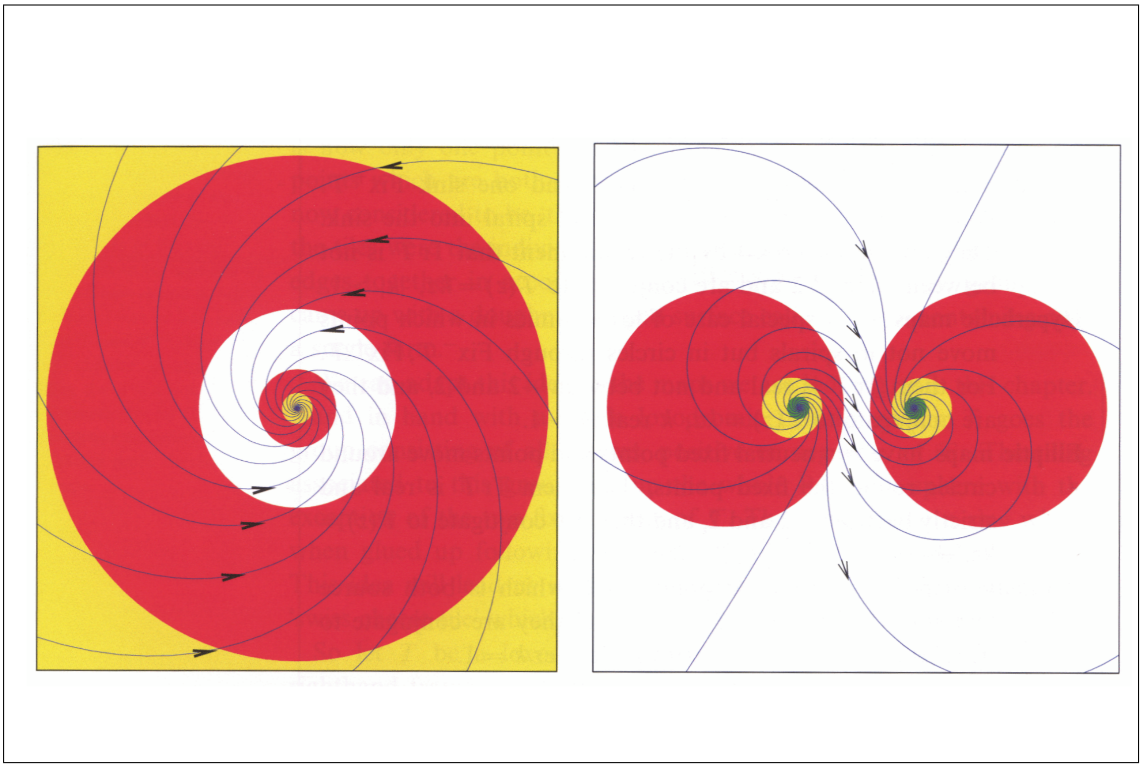
Aufgabe 3 (Bessel-Funktion)
Sei
$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$
Zeige, dass J die Differentialgleichung
$$z^2 J''(z) + zJ'(z) + z^2 J(z) = 0$$
erfüllt.

Aufgabe 4 (Konstruktion von Stammfunktionen)
Sei $\gamma_z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_z(t) = tz$ gegeben. Berechne die Kurvenintegrale
$$F(z) = \int_{\gamma_z} \xi e^{\xi}\, d\xi \quad \text{und} \quad G(z) = \int_{\gamma_z} |\xi|^2\, d\xi$$
und bestimme alle Punkte, in denen F und G komplex differenzierbar sind.

***Aufgabe 5** (Interpretation des komlexen Kurvenintegrals)
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve mit nichtverschwindender Ableitung. Für ein Vektorfeld $\mathfrak{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ haben wir das reelle Kurvenintegral
$$\int_\gamma \mathfrak{v} \cdot dx := \int_a^b \langle \mathfrak{v}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt,$$
wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Den Wert dieses Integrals interpretiert man als die geleistete Arbeit bei der Verschiebung eines Punktes entlang des Weges γ im Kraftfeld $\mathfrak{v}$.

Das Bild von γ beschreibt in diesem speziellen Fall aber auch ein Stück einer (ein-dimensionalen) Hyperfläche und für diese haben wir das orientierte Oberflächenintegral
$$\int_\gamma \mathfrak{v}\, d\vec{\sigma} := \int_a^b \langle \mathfrak{v}(\gamma(s)), \nu(\gamma(s))\rangle \left|J_\gamma(s)^T J_\gamma(s)\right|^{1/2} ds,$$
wobei $\nu(x)$ die Normale am Punkt x und J_γ die Jacobi-Matrix bezeichnet. Den Wert dieses Integrals interpretiert man als die Durchflussmenge durch γ, wenn $\mathfrak{v}$ die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreibt.

1. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ durch die Zuordnung $(x,y) \mapsto x + iy$ mit $\mathbb{C}$. Zeige, dass
$$\nu(\gamma(s)) \left|J_\gamma(s)^T J_\gamma(s)\right|^{1/2} = \pm i\gamma'(s)$$
gilt.
2. Wir wählen nun die Orientierung $\nu(\gamma(y)) = -i\gamma'(y)$. Einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ordnen wir das Vektorfeld
$$\mathfrak{v}_f(x,y) = (\Im f(x+iy), \Re f(x+iy))$$
zu. Zeige, dass
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}} \cdot dx + i \int_\gamma \mathfrak{v}_{\overline{f}}\, d\vec{\sigma}$$
gilt.
3. Zeige, dass die Divergenz
$$\operatorname{div}((v_1, v_2)) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2$$
des Vektorfeldes $\mathfrak{v}_{\overline{f}}$ für holomorphes f verschwindet.



Zwei loxodromische Möbiustransformationen. Aus D. Mumford, C. Series, D. Wright: *Indra's Pearls*, Cambridge 2002.

4. Folgere aus dem Satz von Gauss, dass für eine holomorphe Funktione f

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

gilt, wenn γ den Rand eines C^1-Gebietes Ω parametrisiert, d.h. wenn Ω offen und zusammenhängend ist, γ das halboffene Intervall $[a,b)$ bijektiv auf den Rand $\partial\Omega$ abbildet und der durch $\gamma(t+k(b-a)) := \gamma(t)$, $t\in[a,b)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, periodisch fortgesetzte Weg auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass der Imaginärteil des Integrals verschwindet und nutze dann die Holomorphie von if.

Erläuterung zu den Abbildungen. Man teilt die Möbius-Transformationen T in vier Klassen ein. Hat T nur einen Fixpunkt, z.b. $T = az + b$ mit $b \neq 0$, so nennt man T *parabolisch.* Hat T zwei Fixpunkte, so kann man bis auf Konjugation annehmen, dass diese 0 und ∞ sind, also $T(z) = az$ gilt. In diesen Fällen nennt man T

- *elliptisch*, wenn $|a| = 1$ gilt,
- *hyperbolisch*, wenn a reell und positiv ist,
- *loxodromisch* in allen anderen Fällen.