Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 9

Abgabe: 17./18. Dezember 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und nehme in keinem Punkte negative Werte an. Zeige: falls das Integral von f über $\mathbb{R}^n$ verschwindet, so ist f konstant null. Folgere daraus, dass für jeden Quader Q das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_Q f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

auf $\mathcal{C}^0(Q)$ positiv definit ist.

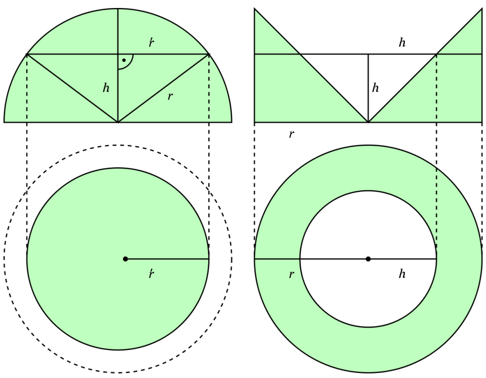
Aufgabe 2. Beweise die folgenden Aussagen für Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(a) Es ist f nach oben halbstetig genau dann, wenn $-f$ nach unten halbstetig ist.

(b) Sind f und g nach oben halbstetig, so auch $f + g$ und $c \cdot f$ für $c > 0$.

(c) Sind f und g nach oben halbstetig und $f+g$ nach unten halbstetig, dann ist f stetig.

Aufgabe 3. Bestimme das Volumen der Halbkugel mit Radius $r > 0$ mithilfe des Prinzips von Cavalieri. Vergleiche dazu wie auf der Abbildung gezeigt die dem Zylinder mit Radius r und Höhe r einbeschriebene Halbkugel (im Bild links) mit dem Komplement des demselben Zylinder einbeschriebenen Kegels (im Bild rechts).



Die oberen Grafiken zeigen jeweils den vertikalen Schnitt durch den Mittelpunkt; die unteren jeweils den horizontalen Schnitt an der Höhe h.