Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 2

Abgabe: 29./30. Oktober 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Es sei $\langle -, - \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Betrachte auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$ die Funktion

$$F(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2},$$

wobei $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

(a) Ist F stetig nach 0 fortsetzbar?

(b) Zeige, dass F auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ihr absolutes Maximum und Minimum annimmt. *Hinweis:* Berechne $F(\lambda x)$ für $\lambda \neq 0$.

(c) Zeige weiter, dass es Vektoren der Norm 1 gibt, in denen F maximal bzw. minimal wird. Das sind Eigenvektoren von A; bestimme den zugehörigen Eigenwert.

(d) Es sei e_1 ein Vektor der Länge 1, so dass $F(e_1) = \lambda_1$ maximal ist. Betrachte die Ebene $\langle x, e_1 \rangle = 0$. Zeige: es gibt einen Vektor e_2 der Länge 1 in dieser Ebene, so dass $F(e_2) = \lambda_2$ maximal unter der Nebenbedingung $\langle x, e_1 \rangle = 0$ wird.

(e) Iteriere das Verfahren und folgere: alle Eigenwerte von A sind reell, und es gibt eine orthogonale Matrix S mit ${}^tSAS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Aufgabe 2. Es sei P^2K die projektive Ebene über dem Körper K. Eine (projektive) Gerade ist die Nullstellenmenge eines linearen Polynoms

$$l(x_0, x_1, x_2) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

für homogene Koordinaten x_0, x_1, x_2.
Zeige: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade; je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. Ist L eine Gerade, so existiert eine bijektive Abbildung $\lambda : P^1K \to L$ der Gestalt

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_{00} t_0 + \alpha_{01} t_1 \\ x_1 &= \alpha_{10} t_0 + \alpha_{11} t_1 \\ x_2 &= \alpha_{20} t_0 + \alpha_{21} t_1 \end{aligned}$$

für homogene Koordinaten t_0, t_1 in P^1K.

Aufgabe 3. (Pentagramm) Eine Strecke AB soll durch den Punkt P so geteilt werden, dass

$$AB : AP = AP : PB$$

gilt, d.h. Gesamtstrecke : (großer Teilstrecke) = (große Teilstrecke) : (kleiner Teilstrecke).
Nenne das Verhältnis g ("goldener Schnitt"), bestimme es. Wie kann P mit Zirkel und Lineal konstruiert werden? Welcher Zusammenhang besteht mit dem regulären Fünfeck? Bestimme das Verhältnis

$$\text{Diagonale : (Seite von Fünfeck)}$$

und die Seitenlänge selbst, wenn das Fünfeck dem Einheitskreis einbeschrieben ist.