§3. Fredholmsche Integralgleichungen

① $\mathcal{K}(x,y) \in L^2_{\mathbb{C}}(Q)$,

$$Q = \underbrace{[a,b]}_{I} \times \underbrace{[c,d]}_{J} \quad \text{Rechteck} \subset \mathbb{R}^2$$

$$K : L^2(I) \longrightarrow L^2(J)$$

$$Kf(y) = \int_I f(x)\,\overline{\mathcal{K}(x,y)}\,dx$$

kompakter Operator mit Kern $\mathcal{K}$.

<u>Bem:</u> 1) der adjungierte Operator hat Kern $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$.

2) Nur der Nulloperator hat den Kern 0.

Beweis. Es seien I_0, J_0 beliebige Teilintervalle von I ~~bzw. J~~, χ_{I_0}, χ_{J_0} die char. Funktionen

$$\int \chi_{I_0}(x)\,\overline{\mathcal{K}(x,y)}\,dx = 0$$

$$\int\int \chi_{I_0}(x)\,\overline{\mathcal{K}(x,y)}\,dx\,\chi_{J_0}(y)\,dy = 0$$

d.h. $$\int_{I_0 \times J_0} \overline{\mathcal{K}}(x,y)\,d(x,y) = 0.$$

Da das für beliebige Rechtecke $I_0 \times J_0$ gilt, ist $\mathfrak{K}(x,y) = 0$ f. ü.

3) $\|K\| \leq \|\mathfrak{K}\|$

4) $\mathfrak{K}$ stetig $\Rightarrow$ $K : L^2(I) \to \mathcal{C}^0(J)$

(2) Def 7.1 Die Gleichung

$$(F) \quad f(y) = g(y) + \lambda \int_I f(x)\, \overline{\mathfrak{K}(x,y)}\, dx$$

heißt Fredholmsche Integralgleichung (2-ter Art). (Dabei ist $I = J$.)

Satz 7.1 Für (F) gilt die Fredholmsche Alternative.

Also:

1) $E_\lambda = \{ f : f(y) = \lambda \int_I f(x)\, \overline{\mathfrak{K}(x,y)}\, dx \}$
$E^*_\lambda = \{ f : f(y) = \overline{\lambda} \int_I f(x)\, \mathfrak{K}(y,x)\, dx \}$

$\dim E_\lambda = \dim E^*_\lambda < \infty$

2) Genau dann, wenn $\dim = 0$, ist (F) für jedes $g \in L^2$ eindeutig lösbar

3) (F) ist für g genau dann lösbar, wenn

$$\cancel{\int g(y)\,\bar{h}(y)\,dx}$$

$$\int_I g(y)\,\bar{h}(y)\,dy = 0$$

für alle $h \in E_\lambda^*$.

Frage: für welche λ ist $E_\lambda = 0$?

Def 3.2 λ singulärer Wert für (F) oder für K, wenn $E_\lambda \neq 0$.