Kap IV. Lineare Operatoren

Erinnerung Lineare Gleichungssysteme sind Konkretisierung der Theorie linearer Abb endlich dim. VRe: damit: unendliche Gleichungssysteme werden durch lineare Operatoren (≡ Abbildungen) von Hilberträumen beschrieben

§1. Lineare Operatoren

(1) Def 1.1 i) $T: E \to F$ lineare Abb von Hilberträumen. T linearer Operator ⇔ 1) oder 2) oder 3) gilt.

1) T stetig   2) T in 0 stetig
3) $\exists C: \|Tx\| \le C\|x\|$ für alle x

Beweis der Äquivalenz:

3) ⇝ 1) $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$,
$\|x - x_0\| < \delta$ ⇝ $\|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\|$
$\le C\|x - x_0\| \le C\delta = \varepsilon$
1) ⇝ 2) tautologisch
2) ⇝ 3) T in 0 stetig ⇝ $\exists A$ mit:
aus $\|x\| \le A$ folgt $\|Tx\| \le 1$.
Sei nun $x \in E$ beliebig $(\neq 0)$, dann ist

$$\|Tx\| = \frac{1}{A}\|x\| \underbrace{\Big\| T\big(\underbrace{A\tfrac{x}{\|x\|}}_{\|.\|\le A}\big)\Big\|}_{\le 1} \le \frac{1}{A}\|x\|.$$

Def 1.1' Stetige Linearform $l : E \to \mathbb{K}$ heißt lineares Funktional.

Erinnerung. $K \subset E$ abgeschlossener Unterraum. Dann ist

$$E = K \oplus K^\perp,$$

$K^\perp$ abg. Unterraum.

Denn: 1) $K^\perp$ abg. Unterraum" ist immer so.

2) $K \cap K^\perp = \{0\}$ immer so

3) $x \in E$, $x = \underset{\underset{K}{\uparrow}}{Px} + \underset{\underset{K^\perp}{\uparrow}}{\underbrace{(x - Px)}}$

P orth. Projektion

Theorem 1.1 (Satz von Riesz / Fischer) Jedes lineare Funktional l auf E ist

$$l(x) = \langle x, a \rangle$$

mit einem wohlbestimmten $a \in E$.

Beweis 1) $l \equiv 0 \;\rightsquigarrow\; a = 0$. ✓

2) $l \neq 0$.

$K = \mathrm{Ker}\, \ell = \{x : \ell(x) = 0\}$ abgeschlossener Unterraum. Damit

$$E = K \oplus K^\perp$$

$\dim K^\perp = 1$. Denn seien $x, y \in K^\perp$.

$$z = \ell(x)y - \ell(y)x$$

$\Rightarrow \ell(z) = 0$, d.h. $z \in K \cap K^\perp \Rightarrow z = 0$

Wähle $e_0 \in K^\perp$, $\neq 0$. Jedes $x \in E$:

$$x = x_0 + \alpha e_0 \quad , \quad x_0 \in K.$$

(1) $\ell(x) = \alpha\, \ell(e_0)$

(2) $\langle x, e_0 \rangle = \langle x_0 + \alpha e_0, e_0 \rangle = \alpha \|e_0\|^2$

Damit:

$$\ell(x) = \alpha\, \ell(e_0) = \frac{1}{\|e_0\|^2} \langle x, e_0 \rangle\, \ell(e_0)$$

$$= \langle x, \underbrace{\frac{1}{\|e_0\|^2} \overline{\ell(e_0)}\, e_0}_{a} \rangle$$

QED

Also: E^* VR der lin. Funktionale
$\equiv$ Dualraum von E.

$\ell \longmapsto a$ von eben liefert eine Bijektion, „Antiisomorphismus"

$$\iota : E^* \longrightarrow E.$$

$$\iota(\alpha\ell) = \bar{\alpha}\,\iota(\ell).$$

② Satz 1.2 $T : E \to F$ linearer Operator. Dann ex genau ein linearer Op $T^* : F \to E$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, T^*y\rangle_E$$

Def 1.2 T^* der zu T duale Operator.

Beweis 1) $T^* = 0 \rightsquigarrow \langle x, T^*y\rangle = 0$ alle y
$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$

$\rightsquigarrow Tx = 0 \rightsquigarrow T = 0$

2) Existenz. $y \in F$ fest. Definiere ein lin. Fktal ℓ auf E:

$$x \longmapsto \langle Tx, y\rangle = \ell(x)$$

$\exists!\ T^*y$ mit $\ell(x) = \langle x, T^*y\rangle$,

d.h. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.

Verifiziere: T^* linear und stetig

Linearität: lösg.

Stetigkeit.

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle$$
$$\leq \|TT^*y\|\cdot\|y\|$$
$$\leq C\|T^*y\|\cdot\|y\|$$

$$\Rightarrow \|T^*y\| \leq C\|y\|$$

Def 1.3. $\|T\| = \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\|\}$

Zusatz 1) ℓ lin. Funktional $\Rightarrow \|\ell\| = \|a\|$, wenn a der zugehörige Vektor

2) $\|T^*\| = \|T\|$

3) $T^{**} = T$

③ Def 1.4 i) $T: E \to E$ hermitisch $\Leftrightarrow T = T^*$
ii) $K: E \to F$ endlich $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Bild} < \infty$
iii) $K: E \to F$ kompakt $\Leftrightarrow$ beschränkte Mengen $\xrightarrow{K}$ rel. kompakte Mengen

Satz 1.3 1) endlich $\Rightarrow$ kompakt, K^* endlich
2) K kompakt $\Rightarrow$ K^* kompakt

Vorher

Satz 1.4 T lineare Abb. $: E \to F$.
Dann

i) $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$

ii) $F = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \operatorname{Ker} T^*$

Beweis. $y \perp \operatorname{Im} T$

$\langle Tx, y\rangle = 0$ für alle $x \in E$

$\langle x, T^* y\rangle = 0$ — $x \in E$

$T^* y = 0$

$\rightsquigarrow$ $(\operatorname{Im} T)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T^*$

$y \in \operatorname{Ker} T^*$

$\langle x, T^* y\rangle = 0$ für alle x

$\langle Tx, y\rangle = 0$ für alle x

$y \perp \operatorname{Im} T$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{Ker} T^* \subset (\operatorname{Im} T)^{\perp}$

ii) aus i)

Beweis von Satz 1.3. i) Zeige: K^* endlich wenn K endlich.

$$F = \underbrace{\operatorname{Im} K}_{\text{endl}} \oplus \operatorname{Ker} K^*$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} F / \operatorname{Ker} K^* \cong \operatorname{Im} K \\ \text{sii} \\ \operatorname{Im} K^* \end{array}$$

Also auch $\dim \operatorname{Im} K^* = \dim \operatorname{Im} K$

ii) K kompakt heißt: ist x_j eine beschränkte Folge – i.e. $\|x_j\| \le C$ –, so enthält Kx_j eine konvergente Teilfolge.

Nun sei y_j eine beschränkte Folge in F, $\|y_j\| \le C$. Dann ist $K^* y_j$ eine beschränkte Folge in E, also enthält $KK^* y_j$ eine konvergente Teilfolge. Nimm also an, $KK^* y_j$ selbst sei konvergent. Ich behaupte, $K^* y_j$ muß konvergent sein:

$\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\|K^* y_j - K^* y_k\|^2 &= \langle K^*(y_j - y_k), K^*(y_j - y_k)\rangle \\ &= \langle KK^* y_j - KK^* y_k, y_j - y_k\rangle \\ &\le \|KK^* y_j - KK^* y_k\| \cdot 2C\end{aligned}$$

Wähle also j_0 so groß, daß für $j, k > j_0$:

$$< \frac{\varepsilon}{2C} \cdot 2C = \varepsilon$$

<u>Satz 1.5</u> $K_j \to K$ in der $\|\cdot\|$ (Def 1.3)
K_j kompakt $\Rightarrow$ K kompakt

<u>Beweis</u> (schöne Übung in Konvergenz!)

x_ℓ beschränkte Folge. Suche konv. Teilfolge von Kx_ℓ.

N. V. Teilfolge $x_1^1\ x_2^1 \dots$, so daß $K_1 x_1^1 \dots$ konvergiert.

N. V. — $x_1^2\ x_2^2 \dots$, so daß $K_2 x_1^2 \dots$ konvergiert

usw.

Betrachte die Folge x_ℓ^ℓ. Dann: $K_j x_\ell^\ell$ konvergiert für jedes j.

Sei nun $\|x_\ell\| \leq C$. $\varepsilon > 0$. Wähle j so groß, daß

$$\|K - K_j\| < \varepsilon. \qquad j \text{ sei nun fest.}$$

Wähle ℓ_0 so groß, daß für $\ell, m > \ell_0$ gilt

$$\|K_j x_\ell^\ell - K_j x_m^m\| < \varepsilon.$$

Berechne:

$$\|K x_\ell^\ell - K x_m^m\| \leq \|(K - K_j)(x_\ell^\ell - x_m^m)\| + \|K_j (x_\ell^\ell - x_m^m)\|$$

$$\le \varepsilon \cdot 2C + \varepsilon = (2C+1)\,\varepsilon$$

Also: $K x_\ell^\ell$ konvergent. $\square$

Satz 1.6 $K : E \to E$ kompakt. Dann existiert eine Folge endlicher Operatoren $K_j \xrightarrow[\|\cdot\|]{} K$. K hermitesch $\Rightarrow$ die K_j sind hermitesch wählbar.

Beweis. 1) $e_1, e_2, \dots$ ONB
$E_j = [e_1, \dots, e_j]$. $P_j : E \to E_j$ orthogonale Projektion. Setze

$$K_j = P_j K P_j .$$

Dann ist K_j endlich. Zeige: $K_j \to K$

2) Angenommen, NEIN $\Rightarrow$

$\exists \varepsilon > 0 \, \exists K_{j_\nu} : \|K - K_{j_\nu}\| \ge \varepsilon$. Nenne die j_ν wieder j. Also $\|K - K_j\| \ge \varepsilon$, d.h. $\exists x_j$ mit $\|x_j\| = 1$ und

$$\|K x_j - K_j x_j\| \ge \varepsilon .$$

$K x_j$ enthält eine konvergente Teilfolge, nenne sie wieder x_j, $K x_j$.

$KP_j x_j$ enthält ebenfalls eine konv. Teilfolge, da die Folge $P_j x_j$ beschränkt ist.

Also dürfen wir annehmen:

$$Kx_j \to a \quad , \quad KP_j x_j \to b$$
$$\| Kx_j - K_j x_j \| \geq \varepsilon$$

Ich zeige: (1) $a = b$

(2) $\| P_j K x_j - P_j K P_j x_j \| \to 0$

(3) $\| Kx_j - P_j K x_j \| \to 0$

(2)(3) $\leadsto$ $\| Kx_j - K_j x_j \| \to 0$ Widerspruch!

(1) $$\| a - b \|^2 = \langle a-b, a-b \rangle$$
$$= \lim \langle Kx_j - KP_j x_j , a-b \rangle$$
$$= \lim \langle x_j , (K^* - P_j K^*)(a-b) \rangle$$
$$\leq \lim \underbrace{\| x_j \|}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\| (K^* - P_j K^*)(a-b) \|}_{\downarrow \, 0} = 0$$

(2) $$\| P_j K x_j - P_j K P_j x_j \| \leq \| P_j \| \, \| Kx_j - KP_j x_j \|$$
$$\to 0 \quad \text{(nach (1))}$$

(3) $$\| Kx_j - P_j K x_j \| \leq \| Kx_j - a - P_j K x_j + P_j a \|$$
$$+ \| a - P_j a \|$$
$$\leq \| I - P_j \| \, \| Kx_j - a \|$$
$$+ \| (I - P_j)(a) \|$$
$$\leq \| Kx_j - a \| + \| (I - P_j) a \|$$
$$\to 0$$

④ Beispiele

1) $E = \ell_2$

$(a_{ij}) = A \in \mathbb{K}^{\infty \times \infty} \qquad \sum |a_{ij}|^2 = C^2 < \infty$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I_0(\varepsilon) \subset\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, endlich,

$$\Big| C^2 - \sum_I |a_{ij}|^2 \Big| < \varepsilon$$

für alle I endlich $\supset I_0(\varepsilon)$

Dann $\qquad Kx = Ax$, i.e.

$$K(x)_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

definiert einen kompakten Operator $\ell_2 \to \ell_2$.

Beweis. 1) N beliebig

$$\sum_{j=1}^N |a_{ij}| |x_j| \leq \Big(\sum_j |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_j |x_j|^2 \Big)^{1/2} \leq C \|x\|$$

Damit existiert $(Kx)_i$.

2) $$\sum_{i=1}^N |Kx_i|^2 = \sum_{i=1}^N \Big| \sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j \Big|^2$$
$$\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \sum_j |x_j|^2$$
$$\leq C^2 \|x\|^2$$

3) $P_N x \overset{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_N, 0, \dots 0 \dots)$

Setze

$$K_N = P_N K P_N .$$

Dann ~~wird~~ gilt

$$K_N x = \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i \Big|_{j=1 \dots N}, 0, \dots, 0 \right)$$

$\lim_{N \to \infty} K_N = K$, da K_N endlich $\Rightarrow K$ kompakt

2) $E = L^2[a,b]$

$\mathcal{K}(x,y) \in L^2([a,b] \times [a,b])$ reellwertig

$f \in L^2$:

$$K f(y) = \int_a^b f(x) \mathcal{K}(x,y)$$

Satz 1.7 $K : L^2 \to L^2$ kompakter Operator

Beweis. 1) Existenz des Integrals

$|\mathcal{K}(x,y)|^2$ und daher $|\mathcal{K}(x,y)|$ integrierbar über $Q = I \times I$, $I = [a,b]$. Damit (Fubini) für fast alle $y \in I$ existiert

$$\int_I \mathcal{K}(x,y)\, dx \quad \text{und} \quad \int_I |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dx$$

Für $f \in L^2(I)$ existiert für die x, y

$$\int_I \mathcal{K}(x,y) f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} Kf(y).$$

2) $$\int_I |Kf(y)|^2\,dy = \int_I \left|\int_I \mathcal{K}(x,y) f(x)\,dx\right|^2 dy$$
$$\leq \int_I \int_I |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dx \int |f(x)|^2\,dx \quad dy$$
$$= \|f\|^2_{L^2(I)} \cdot \|\mathcal{K}\|^2_{L^2(Q)}$$

$\rightsquigarrow Kf \in L^2(I), \quad \|K\| \leq \|\mathcal{K}\|_{L^2(Q)}$

3) Kompaktheit

Annahme, $\mathcal{K}(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \; \varphi, \psi \in L^2(I)$

$$Kf(y) = \int \varphi(x) f(x)\,dx\; \psi(y) = \langle \varphi, f\rangle \cdot \psi(y)$$

d.h. $\operatorname{Im} K$ 1-dimensional.

Ist $\mathcal{K} = \sum \varphi_j(x)\psi_j(y) \rightsquigarrow$
$\operatorname{Im} K$ endlich dimensional.

Nun ex zu $\mathcal{K}(x,y)$ immer ein $\mathcal{K}_0$
wie oben mit
$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_0\| < \varepsilon_1$$
zu gegebenem ε. $\rightsquigarrow K$ Limes
endlicher Op, also kompakt

Über $\mathbb{C}$ schreibe

$$Kf(y) = \int f(x)\,\overline{\mathcal{K}(x,y)}\,dx,$$

dann gilt alles entsprechend.

Notiere noch

Def 1.5 $\mathcal{K}$ heißt Kern des Integraloperators K.

Bemerkung. K^* hat dann den Kern $\overline{\mathcal{K}(y,x)}$:

$$Kf(y) = \int f(x)\,\overline{\mathcal{K}(x,y)}\,dx$$

$$K^*f(y) = \int f(x)\,\mathcal{K}(y,x)\,dx$$

(aus Fubini)