§ 7. Beweise

① K kompakt $\subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{C}^0(K)$, $\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(K)$ Algebra der stetigen Fktn auf K.

Theorem 1 (Weierstraßscher Approxim-Satz)

$A \subset \mathcal{C}^0(K)$ ein Unteralgebra mit:

1) $1 \in A$
2) A „trennt Punkte"
3) A „abgeschlossen bei glm. Konvergenz"

Dann ist $A = \mathcal{C}^0(K)$

Theorem 1' $A \subset \mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(K)$ mit 1), 2), 3) und 4) abgeschlossen unter $f \mapsto \bar{f}$. Dann $A = \mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(K)$.

Beweis von Thm 1. 1) Zeige: $f \in A \Rightarrow |f| \in A$ (und damit f^+, f^- (positiver, negativer Anteil), mit (f,g) auch $\max(f,g)$, $\min(f,g)$)

Beweis v. 1) Wähle $\varepsilon > 0$. Betrachte

$$F_\varepsilon(t) = (\varepsilon^2 + t)^{1/2}$$

$$= (\varepsilon^2 + 1/2)^{1/2} \left(1 + \frac{t - 1/2}{\varepsilon^2 + 1/2}\right)^{1/2}$$

Beachte: $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \cdots$ (Taylor)

konv. $|u| < 1$.

Damit für $u = \frac{t - 1/2}{\varepsilon^2 + 1/2}$, $0 \le u < 1$,
also $|t - 1/2| < \varepsilon^2 + 1/2$, insbesondere

$0 \le t \le 1$. erlaubt

Damit: $F_\varepsilon(t)$ ist auf $[0,1]$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar. Wähle ein Pol $P_\varepsilon(t)$ mit

$$|F_\varepsilon(t) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon, \quad 0 \le t \le 1$$

Setze $t = x^2$, $-1 \le x \le 1$:

$$|F_\varepsilon(x^2) - P_\varepsilon(x^2)| < \varepsilon.$$

Auf $[-1,1]$ ist auch

$$(\varepsilon^2 + x^2)^{1/2} - |x| < \varepsilon,$$

also $\quad \big|\,|x| - P_\varepsilon(x^2)\big| < 2\varepsilon \quad |x| \le 1$

Nun sei $f \in A$ mit $|f| \le 1$. Dann also

$$\big|\,|f| - \underset{\overset{\cap}{A}}{P_\varepsilon(f^2)}\big| < \varepsilon$$

ε beliebig $\leadsto$ $|f| \in A$

$\leadsto$ Für jedes f ist $|f| \in A$ mit $f \in A$.

2) $x \neq y$, $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Da $1 \in A$, dürfen wir $f(x) f(y) \neq 0$ annehmen, also

$$f(x) f(y) \left(f(x) - f(y) \right) \neq 0.$$

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Lin. Gleichungssystem

$$a\, f(x) + b\, f(x)^2 = r_1$$
$$a\, f(y) + b\, f(y)^2 = r_2$$

Det. $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ eindeutig lösbar, d.h. es gibt $g \in A$ mit $g(x) = r_1$, $g(y) = r_2$

3) $\varepsilon > 0$, $g \in \mathcal{C}^0(K)$. Wähle $x \in K$. Zu $y \in K$ existiert $f_{xy} \in A$ mit

$$f_{xy}(x) = g(x)$$
$$f_{xy}(y) = g(y)$$

$$\left.\begin{aligned} U_{xy} &= \{ z : f_{xy}(z) < g(z) + \varepsilon \} \\ V_{xy} &= \{ z : f_{xy}(z) > g(z) - \varepsilon \} \end{aligned}\right\} \ni x, y \quad \text{offen}$$

Endlich viele U_{xy} überdecken K.

$$U_{xy_1} \quad \ldots\ldots \quad U_{xy_r}$$

dazu $V_{xy_1} \qquad V_{xy_r}$

$f_{xy_1} \qquad f_{xy_r}$

$$f_x \overset{\text{def.}}{=} \min f_{x y_\ell} \quad \in A$$

nach Teil 1

$\Rightarrow$ $f_x < g + \varepsilon$ auf ganz K

$f_x > g - \varepsilon$ auf $U_x = \bigcap V_{x y_\ell} \ni x$

Also: Zu jedem x existiert V_x und $f_x \in A$ mit

$$f_x < g + \varepsilon$$

$$g - \varepsilon < f_x < g + \varepsilon \text{ auf } V_x$$

Endlich viele V_x überdecken K, etwa

$$V_{x_1} \;\ldots\; V_{x_s}$$

$$f_{x_1} \qquad f_{x_s}$$

Setze nun $f = \max f_{x_j}$, $\in A$,

$\Rightarrow$

$$|f - g| < \varepsilon$$

(2) Übergang zu trig. Thm.

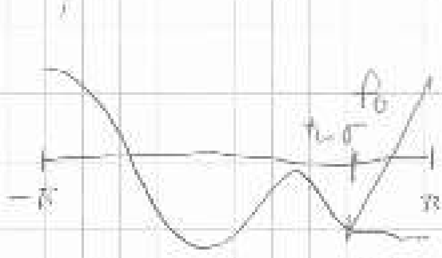
1. Schritt $\mathscr{C}^0[-\pi, \pi]$ dicht in L^2 (nach Def. des Integrals!)

2. Schritt $\mathscr{C}'[-\pi, \pi] = \{ f \text{ stetig}, f(-\pi) = f(\pi) \}$

dicht in $\mathcal{C}^0$ (bez. der L^2-Norm).

Beweis: $f \in \mathcal{C}^0$, $\varepsilon > 0$, welche $\delta > 0$ später, $f_0 = f$ auf $[-\pi, \pi-\delta]$, stetig auf $[-\pi, \pi]$, $f_0(\pi) = f(-\pi)$. Skizze:

Dabei sei $|f_0| \le 2M$, $M \ge |f|$.



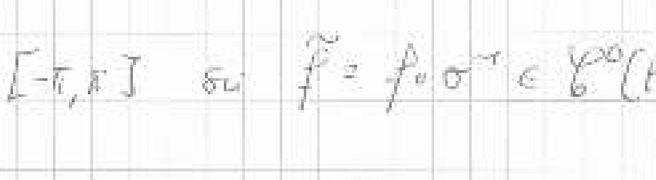
Berechne

$$\|f - f_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_0|^2 \, dx$$

$$= \int_{\pi-\delta}^{\pi} |f - f_0|^2 \, dx \le \int_{\pi-\delta}^{\pi} (|f|^2 + |f_0|^2) \, dx$$

$$\le 4M^2 \cdot \delta, \quad < \varepsilon, \text{ wenn } \delta \text{ klein genug}$$

3. Schritt



$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Für $f \in \mathcal{C}^0[-\pi, \pi]$ sei $\tilde{f} = f \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{C}^0(K)$

Nach Thm 1 liegen die Polynome in x, y dicht in $\mathcal{C}^0(K)$, d.h. die Pol. in $\cos t, \sin t$ liegen dicht in $\mathcal{C}^0$, d.h. Lin. Hülle der $\cos \nu t$, $\sin \nu t$ gleichmäßig dicht in $\mathcal{C}$, also dicht bzgl. L^2-Norm in $\mathcal{C}$, bzw. in L^2.

Damit ist der Hauptsatz über Fourier-entwicklung bewiesen.

(3) Zur gleichmäßigen Konvergenz (Sätze von Dirichlet)

Sei $f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi] \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, 2π-periodisch

$$f = \sum_k a_k e^{ikx}, \quad \cancel{k \in \mathbb{Z}}, \in L^2$$

$$f' = \sum_k b_k e^{ikx}, \quad \in L^2$$

Zshg zwischen a_k und b_k:

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big[\underbrace{f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\substack{=0 \\ \text{(Periodizität)}}} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \Big]$$

$$= ik\, a_k$$

$$\sum_{n}^{m} |a_k e^{ikx}| \le \sum_{n}^{m} |a_k|$$

$$\le \sum_{n}^{m} \frac{1}{|k|} |b_k|$$

$$\le \Big(\sum_{n}^{m} \frac{1}{k^2} \sum_{n}^{m} |b_k|^2 \Big)^{1/2}$$

$$\le \text{const } \|f'\|$$

D.h. die Fourierreihe von f konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen ein f^*. f^* stetig, $\|f - f^*\| = 0 \Rightarrow f = f^*$, da auch f stetig ist.

Analog für höhere Ableitungen.

~~Es hat gereicht: $f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi]$, stetige Fortsetzung war unwichtig~~

(4) Bleibt zu untersuchen $f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi]$, ohne Periodizität!

<u>Hilfssatz</u> Die Fourierreihe von x,

$$x = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \cdot \sin \nu x$$

konv. auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(-\pi, \pi)$ gleichmäßig gegen x

Beweis: 1) Es reicht zu zeigen:

$$\sum (-1)^{\nu+1}/\nu \cdot \sin \nu x \cos\frac{x}{2}$$

konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$ so Ausgangsreihe konv. lokal glm. gegen stetige Grenzfunktion, die f.ü. $= x$ ist, also überall

2) $$\sum_{n}^{N} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \sin\nu \cos\frac{x}{2}$$

$$= \sum_{n}^{N} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \frac{1}{2}\left[\sin(\nu+\tfrac{1}{2})x + \sin(\nu-\tfrac{1}{2})x\right]$$

$$= \pm\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n}\sin(n-\tfrac{1}{2})x + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})x$$

$$- \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sin(n+\tfrac{3}{2})x \pm \dots$$

$$\dots \pm \left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)\sin(N-\tfrac{1}{2})x$$

$$\pm \frac{1}{N}\sin(N+\tfrac{1}{2})x\Big]$$

$$= \pm\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n}\sin(n-\tfrac{1}{2})x + \frac{1}{n(n+1)}\sin(n+\tfrac{1}{2})x$$

$$\pm \dots \pm \frac{1}{N(N-1)}\sin(N-\tfrac{1}{2})x$$

$$\pm \frac{1}{N}\sin(N+\tfrac{1}{2})x\Big]$$

$$\left|\sum\right| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{N}+\sum_{n}^{N-1}\frac{1}{k(k+1)}\right] \longrightarrow 0$$

Beweis des Satzes von Dirichlet:

$f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi]$. Definiere

$$g(x) = f(x) + ax, \quad a = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi}$$

Dann ist g stetig periodisch fortsetzbar, Fourierreihe konv. gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ (Hilfssatz), Fourierreihe von f lokal gleichm. konvergent auf $(-\pi,\pi)$.