§6 Ideengeschichte, Unterrichtsfragen

① Pythagoras (~580–501?), Samos, Insel vor der kleinasiatischen Küste, Polykrates Tyrann, Reisen → Ägypten, Mesopotamien, läßt sich in Süditalien nieder (Kroton/Crotone) philosophische/politische Schule der Pythagoräer (wird schließlich durch einen Aufstand der Stadtbevölkerung vernichtet). „Satz des Pythagoras" viel älter, Entdeckung der Irrationalzahlen (?), Harmonielehre: einfache Zahlenverhältnisse ⟷ Intervallen in der Musik ⟷ Teilungen der Saite.
↝ „Alles ist Zahl"

② Grundtatsache: musikalischer Intervall
≡ Frequenzverhältnis
NICHT ... differenz

 Saite

Unterteilung 1:2 ≡ Verdopplung der Frequenz
≡ Oktave über Grundton

Von daher diatonische Tonleiter (Pythagoras)

Bedingungen: Oktave in 7 Intervalle „Töne"
5 „Ganztöne" 2 Halbtöne
Quinte (5 über Grundton) ≡ 3:2
Quarte ≡ 4:3
Quinte/Quarte ≡ 1 Ganzton

→ „Quint + Quart" = „Oktave"

$$3/2 \cdot 4/3 = 2$$

„Quint − Quart" = Ganzton

$$3/2 \,/\, 4/3 = 9/8$$

Halbton errechnet sich nun aus

$$y^2 \left(\frac{9}{8}\right)^5 = 2$$

Halbton $= 256/243$

typisches Stimmungsproblem: das Intervall 5:4 nicht herstellbar (keine „reine Terz"):

$$\text{große Terz} = \left(9/8\right)^2 = \frac{81}{64} > \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$$

$$\text{kleine Terz} = \frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} = \frac{32}{27} = \frac{128}{108} < \frac{135}{108} = \frac{5}{4}$$

Aber als „Obertöne" kommen auch immer reine Terzen vor.

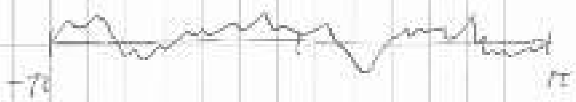
„temperierte Stimmung" (12-Ton-Leiter)
jeder Halbton $\sqrt[12]{2}$, jeder Ganzton $\sqrt[6]{2}$.

Vergleich siehe umseitig:

c	1	1
d	1,12500	1.12246
e	1.26563	1,25992
f	1.33333	1.33484
g	1.50000	1.49831
a	1.68750	1.68179
h	1,89884	1,88775
c	2	2
	diatonisch = c-dur-Tonleiter	temperiert

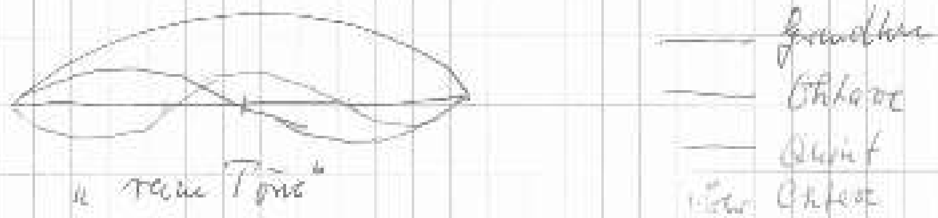
③ Physik/Mathematik

schwingende Saite der Länge 2π
Auslenkung $y = y(x,t)$



exakte Beobachtungen

1° es gibt einfache Schwingungsformen



2° reine Töne überlagern sich zum aktuellen Klangbild (= Schwingungsform) mathematische Analyse

$$(W) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \lambda \text{ Materialkonst.}$$

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0$$

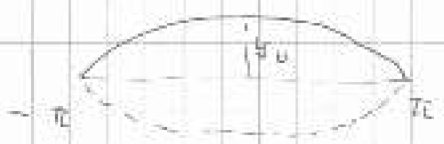
Frage: Lösungen bei gegebener Anfangsauslenkung $y(x,0)$.

B. Taylor (1685–1731) Noch nicht (W).
1713 De motu nervi tensi

Ergebnis: Trennung der Variablen in (W):

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 \cos \omega x \cdot \cos \alpha t \\ \quad \alpha = \lambda \omega \\ \rightsquigarrow \text{Randbedingungen} \end{array}\right\} y = y_0 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\lambda}{2} t$$

„Grundton"



BT erhält auch andere Lösungen, z. B. mit halber Wellenlänge ....

J.B. d'Alembert (1717–1783) stellt (W) auf.
1747 Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibrations

Deutlicher Fortschritt durch

Daniel Bernoulli (1700–1782)

1753 Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes

1° reine Lösungen à la Taylor

$$y_{2n+1} = a_{2n+1} \cos (2n+1)\frac{x}{2} \sin (2n+1)\frac{\lambda}{2} t$$

$$y_{2n} = a_{2n} \sin 2n \cdot \frac{x}{2} \cos 2n \frac{\lambda}{2} t$$

2° Superposition

$$(L) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} (y_{2n+1} + y_{2n})$$

PROBLEME: 1° Konvergenz?
2° Sind das alle Lösungen?

Bernoulli: Das sind alle! Entnimmt das aus musikalischer Erfahrung: jeder Klang ist eine Überlagerung reiner Töne.

„Dies sind also die unendlich vielen ohne jede Rechnung gefundenen Kurven ... Es ist allerdings so, daß Herr EULER diese unendliche Vielfalt nicht als allgemein, sondern nur als Spezialfall ansieht ..."

1707–1783 Eulers Einwendungen 1753 Remarques sur les mémoirs précédens de M. Bernoulli

Euler geht aus von einem beliebigen Anfangszustand der Saite, läßt sie dann schwingen. Wie kann dann je eine Lösung der Form (L) herauskommen?

In der Tat gibt DB kein Verfahren zur Bestimmung der Koeff an. Daher!
EULER „die Lösung ist nicht allgemein"
Fourier Konvergenz völlig unklar:
„Die Zahl ∞ scheint gegen die Natur einer solchen Zusammenhangs zu sein"

Zitat Szabó p. 343

1768–1830 Th. analytique ... 1807/1811 50 Jahre später: Fourier entdeckt Wärmeleitung mittels Fourier-Reihen. Ist aufseiten DB. Keine Beweise

Math. Lösung P.G. Lejeune Dirichlet 1805–59
B. Riemann 1826–1866

Rolle der glm Konvergenz ausgearbeitet.
Denn gliedweise Differentiation nötig

Moderne Entwicklung ≡ Mengenlehre, Integration
(G. Cantor, H. Lebesgue ...)
1845–1918 1875–1941

(4) Was ist elementar?

1) Orthogonalitätsrelationen zugänglich (Schule), aber nicht gut motiviert

2) Fourierzerlegung von Schwingungen (Musik) ist zugängliche Erfahrung, physikalisch sehr wichtig

3) Lietzmann: „Fourierreihen gehören nicht auf die Schule"

Grund: zu viele Konvergenzbegriffe

4) Aber: „Formale" Fourierreihe sofort definierbar

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_j e^{ijx},$$

a_j berechenbar. Also math. „Experimente" möglich und interessant

5) ~~Im~~ Nach Düsseldorfer Richtlinien sollen nur e^x und $\sin x$ als transzendente Fktn besprochen werden. Damit ist natürlich NICHTS möglich.

Wünschenswert: Gute Vertrautheit mit $\sin x$, $\cos x$, usw, möglichst mit Eulerscher Formel $e^{ix} = \ldots$

(meine Meinung)