## §4. Trigonometrische Funktionen

(1) Satz 1. i) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

iii) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Bemerkung: i) ii) folgen aus iii)

Folgerung. $P \in \mathbb{R}[x,y]$. Dann ist $P(\cos x, \sin x)$ eine LK von $\cos \nu x$, $\sin \nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$

Beweis. Reicht zu zeigen:

$$\left.\begin{matrix} \cos \nu x \cdot \cos x, & \cos \nu x \cdot \sin x \\ \sin \nu x \cos x, & \sin \nu x \cdot \sin x \end{matrix}\right\} = \text{LK wie oben}$$

Nun gilt:

$$\cos(\nu+1)x = \cos\nu x \cdot \cos x - \sin\nu x \cdot \sin x$$
$$\sin(\nu+1)x = \cos\nu x \cdot \sin x + \sin\nu x \cdot \cos x$$
$$\cos(\nu-1)x = \cos\nu x \cdot \cos x + \sin\nu x \sin x$$
$$\sin(\nu-1)x = -\cos\nu x \sin x + \sin\nu x \cdot \cos x$$

Da die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ regulär $\rightsquigarrow$ Behauptung

<u>Satz</u> (Orthogonalität)

i) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\nu x \sin\mu x \, dx = \pi \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ \pi & \nu = \mu \end{cases}$$

ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\nu x \cos\mu x \, dx = \pi \delta_{\nu\mu}$$

iii) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\nu x \cos\mu x \, dx = 0$$

iv) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu x} \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } \nu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In i) - iii) seien $\nu, \mu \geq 0$, in iv) ist $\nu \in \mathbb{Z}$ beliebig. ($\nu, \mu \in \mathbb{N}$.) $(\nu,\mu) \neq (0,0)$. In ii) $\nu = \mu = 0$ zulässig

<u>Beweis</u> (aus der Funktionentheorie)

$$\oint z^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{für } \cancel{n \geq 0}\ n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

(Integration über den Einheitskreis). D.h.

$$i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu t}\,dt = \begin{cases} 0 & \nu \neq 0 \\ 2\pi & \nu = 0 \end{cases}$$

Damit (IV). Zu ii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu x \cos \mu x\,dx \qquad \begin{matrix}\nu \geq 0 \\ \mu \geq 0\end{matrix}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}\left(e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}\right)\left(e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}\right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}\left(e^{i(\nu+\mu)x} + e^{i(\nu-\mu)x} + e^{i(\mu-\nu)x} + e^{-i(\nu+\mu)x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[0 + 2\pi\delta_{\nu\mu} + 2\pi\delta_{\nu\mu} + 0\right]$$

$$= \pi\delta_{\nu\mu}.$$

Entsprechend die anderen Fälle.

Folgerung i) Die Funktionen $1, \cos \nu t, \sin \nu t$ bilden in $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$ ein OS, mit $\nu = 1, 2, \ldots$

ii) Die $e^{i\nu t}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, sind OS im $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$.

Später: vollständiges OS, i.e. Hilbertbasis

(2) Theorem 3 (Hauptsatz über Fourierreihen)

Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\nu x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\nu x, \quad \nu \geq 1,$$

sind eine Hilbert-ONB im Raum $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$, und $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$

d.h.

i) Jedes $f \in L^2 ..$ besitzt eine $L^2$-konvergente „Fourierentwicklung"

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x$$

mit:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx, \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

ii) $$\|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2\right)$$

iii) Die Reihe ist gegen Umordnung

unempfindlich und konvergiert in $L^2$ gegen $f$.

Theorem 3' (Fourierentwicklung in $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$)

Die Fkten $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\nu x}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, bilden ONB für $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$, d.h.

i) $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ Fourierentwicklung

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu x}$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x}\, dx$$

ii) $\|f\|^2 = 2\pi \sum |a_\nu|^2$

iii) Die Reihe konvergiert in $L^2$, unempfindlich gegen Umordnung, gegen $f$.

③ Konvergenzfragen

Satz 4 (Dirichlet) $f$ $2\pi$-periodisch, $\in \mathcal{C}^{\ell}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, $\ell > k \geq 0$. Dann konvergiert Fourierreihe von $f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen $f$, und alle Ableitungen bis zur Ordnung $k$ haben glm konv

Fourierreihen, die durch Abltg der Reihe für $f$ entstehen.

Satz 5 (Dirichlet) i) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1_{stw}[-\pi,\pi]$, $2\pi$-periodisch. Dann konv. die Fourierreihe von $f$ glm gegen $f$.

ii) $f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi]$, dann konv. Fourierreihe von $f$ lokal glm gegen $f$ auf $(-\pi,\pi)$

Satz 6 (Carleson 1966) Die Fourierreihe einer $L^2$ Fkt $f$ auf $[-\pi,\pi]$ konvergiert f.ü. gegen $f$. (Insbesondere: für stetige Fktn)

Abr. auch für stetige Fktn kann nicht Konvergenz überall erreicht werden