§ 3 Orthogonalität   V Hilbertraum

① Def 1 i) $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ „orthogonal" „senkrecht"

ii) $A \perp B \Leftrightarrow a \perp b$ für alle $a \in A$, $b \in B$

iii) $A^\perp = \{x : x \perp A\}$

Dabei sei V ein ~~(Prä-)~~ Hilbertraum

Def 2 i) $\overline{A}$ abgeschlossene Hülle von A

ii) $W \subset V$ Hilbertscher Unterraum $\Leftrightarrow$ Vektorunterraum + abgeschlossen

Bemerkungen i) $W \subset V$ Unterraum $\Rightarrow \overline{W}$ Hilbertunterraum

ii) $A^\perp$ Hilbertscher Unterraum

iii) $A^\perp = \overline{A}^\perp = [A]^\perp$

($[A]$ der von A erzeugte Unterraum)

iv) $\mathcal{C}^0(Q) \subset L^2(Q)$ überall dichter Unterraum, nicht abgeschlossen!

② Def 3 M konvex $\Leftrightarrow$ $x, y \in M$, dann auch $tx + (1-t)y$, $t \in [0,1]$, $\in M$

Satz 1 $M \neq \emptyset$ abgeschlossen u. konvex. Dann existiert genau ein $x_0 \in M$, so daß $\|x_0\|$ minimal.

Erinnerung an „kompakt", stetige Funktionen ...

<u>Beweis.</u> $\alpha = \inf\{\|x\| : x \in M\} \geq 0$. Wähle $x_j \in M$ mit $\|x_j\| \to \alpha$.

Zeige: x_j Cauchy

$$\|x_j - x_k\|^2 = \|x_j\|^2 - \langle x_j, x_k\rangle - \langle x_k, x_j\rangle + \|x_k\|^2$$
$$\|x_j + x_k\|^2 = \quad + \quad +$$

$$\|x_j - x_k\|^2 = 2\left(\|x_j\|^2 + \|x_k\|^2\right) - \|x_j + x_k\|^2$$

$$\frac{1}{4}\|x_j - x_k\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_j\|^2 + \|x_k\|^2\right) - \|\underbrace{\tfrac{1}{2}(x_j + x_k)}_{M}\|^2$$

$\varepsilon > 0$, j, k so groß, daß $\|x_{j,k}\|^2 < \alpha^2 + \varepsilon$

$$\frac{1}{4}\|x_j - x_k\|^2 < \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2 + 2\varepsilon\right) - \alpha^2 = \varepsilon$$

Ist x_1 ein weiteres Minimum, so folgt

$$\frac{1}{4}\|x_1 - x_0\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_1\|^2 + \|x_0\|^2\right) - \|\tfrac{1}{2}(x_0 + x_1)\|^2$$
$$\leq \alpha^2 - \alpha^2 = 0$$

<u>Theorem 2</u> W vollständiger Unterraum von V. Dann ex zu $x \in V$ ein $Px \in W$ mit

$$x - Px \perp W.$$

$P : V \to W$ linear, $\|Px\| \leq \|x\|$, $P \circ P = P$

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$$

Def 4 P orthogonale Projektion auf W

Beweis 1) $M = \{x - y : y \in W\}$ x gegeben
W abgeschlossen $\Rightarrow$ M abgeschlossen,

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x - y_1 \\ z_2 &= x - y_2 \end{aligned}\right\} \in M$$

$$\begin{aligned} t z_1 + (1-t) z_2 &= t(x - y_1) + (1-t)(x - y_2) \\ &= x - \underbrace{[y_2 + t(y_1 - y_2)]}_{W} \in M \end{aligned}$$

Daher: M konvex.

Nach Satz 1 eindeutig z_0 minimaler Norm in M

$$z_0 = x - y_0.$$

Nimm dieses y_0 Px.

2) $x - Px \perp W$. Denn Wähle $e \in W$, $\|e\| = 1$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$. Dann

$$\|x - y_0\|^2 < \|x - y_0 + \lambda e\|^2$$

für jeden $\lambda \neq 0$. Also

$$\begin{aligned} \|x - y_0\|^2 &\leqslant \|x - y_0\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - y_0, \lambda e\rangle + |\lambda|^2 \\ 0 &< 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - y_0, \lambda e\rangle + |\lambda|^2 \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{\lambda}\left(\langle x - y_0, e\rangle + \tfrac{1}{2}\lambda\right)\right) \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}, > 0.$

$0 < 2\left(\operatorname{Re}\langle x-y_0, e\rangle + \frac{\lambda}{2}\right)$

$0 \leq \operatorname{Re}\langle x-y_0, e\rangle$

$\lambda \in \mathbb{R}, < 0$

$0 \geq 2\left(\operatorname{Re}\langle x-y_0, e\rangle + \frac{\lambda}{2}\right)$

$0 \geq \operatorname{Re}\langle x-y_0, e\rangle$

$\lambda \in i\mathbb{R} \rightsquigarrow \operatorname{Im}\langle x-y_0, e\rangle = 0$

$\langle x-y_0, e\rangle = 0$ für alle $e \in W$, $\|e\| = 1$

$\rightsquigarrow x - y_0 \perp W$

3) $x = \underset{W}{y_0} + \underset{\perp W}{x-y_0} = \underset{W}{y_1} + \underset{\perp W}{x-y_1}$

$\underset{W}{y_1 - y_0} = \underset{\perp W}{(x-y_0) - (x-y_1)} \rightsquigarrow y_1 = y_0$

4) $x = Px + (x - Px)$ orthogonale Zerlegung

$y = Py + (y - Py)$

$x + y = \underbrace{Px + Py}_{\in W} + \underbrace{(x - Px) + (y - Py)}_{\perp W}$

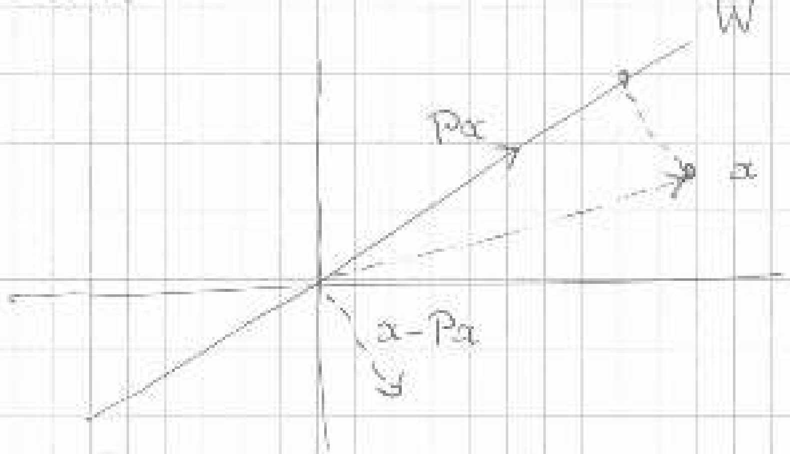
$\rightsquigarrow P(x+y) = Px + Py$

5) $P \circ P = P$ trivial

b) $\langle x, Py \rangle = \langle Px + x - Px, Py \rangle$
$= \langle Px, Py \rangle$

$\langle Px, y \rangle = \langle Px, \cancel{P}y + y - Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$

Skizze



③ Def 5 1) Eine Hilbertbasis von V ist ein lin. unabh. System M, so daß $[M]$ (das Erzeugnis von M) dicht in V liegt.

2) H separabel $\Leftrightarrow$ abzählbare (evtl. endliche) Hilbertbasis

Bemerkung l_2, L^2 sind separabel.

Satz 3 Es sei B eine abzählbare Hilbertbasis. Dann existiert ~~genau~~ eine Orthonormal-Hilbertbasis A mit:

$B = b_1, b_2, \ldots$
$A = a_1, a_2, \ldots$

$[b_1, \ldots, b_n] = [a_1, \ldots, a_n]$

Beweis. Induktion nach n.

$n=1$. Setze $a_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$.

Seien nun $a_1, \ldots, a_n$ schon konstruiert. Sei $W = [a_1, \ldots, a_n]$. Dann ist $b_{n+1} \notin W$. Setze

$$a'_{n+1} = b_{n+1} - P b_{n+1},$$

P die orthogonale Projektion von V auf W. Also $a'_{n+1} \perp W$, $\neq 0$. Setze

$$a_{n+1} = \frac{1}{\|a'_{n+1}\|} a'_{n+1}.$$

Dann ist $b_{n+1} = \lambda a_{n+1} + P b_{n+1}$
$= LK(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

Konstruktiver Beweis geht so:

$$a'_1 = b_1$$
$$a_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$$

$$a'_2 = \alpha_1 a_1 + b_2 \qquad (\neq 0)$$
$$0 = \langle a'_2, a_1 \rangle = \alpha_1 + \langle b_2, a_1 \rangle$$
$$a_2 = \frac{1}{\|a'_2\|} a'_2$$

usw.

Def 6 E ONB (im Hilbertraumsinne) $= \{e_1, e_2, \dots\}$ abzählbar.
Für $a \in V$ heißen die Zahlen
$$\langle a, e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$
die Fourier-Koeffizienten von a bez. E

Satz 4 Es sei E wie oben, $a \in V$, α_j die Fourier-Koeffizienten. Dann:

i) $$a = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \quad \text{Konvergenz in } \|.\|.$$

ii) $$\|a\|^2 = \sum |\alpha_j|^2$$

iii) $$(\alpha_j : j = 1, 2, \dots) \in l_2$$
Umgekehrt: $(\alpha_j) \in l_2$ dann
$$a = \sum \alpha_j e_j \in V$$

iv) $V \cong l_2$, d.h. $\exists$ invertierbare, sogar $\langle\,,\rangle$-erhaltende, lineare Abb, bijektiv: $V \xrightarrow{\sim} l_2$.

Beweis a) $n \in \mathbb{N}$
$$\|a - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\|^2$$
$$= \|a\|^2 - \sum^{n} \bar{\alpha}_j \langle a, e_j \rangle - \sum^{n} \alpha_j \langle e_j, a \rangle + \sum^{n} |\alpha_j|^2$$
$$= \|a\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq \|a\|^2$$

b) $\| \sum_1^n \alpha_j e_j - \sum_1^m \alpha_j e_j \|^2 = \sum_{n+1}^{m} |\alpha_j|^2 \to 0$

also $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \stackrel{\text{def}}{=} b \in V$ existiert.

c) $c = a - b$.

$\langle a, e_k \rangle = \alpha_k = \langle b, e_k \rangle \left(= \sum \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle \right)$

Damit $\langle c, e_k \rangle = 0$ für alle k. Die Fkt $x \longmapsto \langle c, x \rangle$ verschwindet auf einem dichten Unterraum von V und ist stetig $\Rightarrow \equiv 0$: $\langle c, x \rangle = 0$ für alle x $\Rightarrow c = 0$.

Damit i) ii) gezeigt.

d) $(\alpha_j) \in l_2 \Rightarrow \sum \alpha_j e_j$ konvergiert (siehe Teil b). Die Zuordnung

$$a \longmapsto \left(\langle a, e_j \rangle = \alpha_j : j = 1, 2, \ldots \right)$$

ist der gewünschte Isomorphismus. Beachte

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{j} \alpha_j e_j, \sum_k \beta_k e_k \right\rangle$$
$$= \sum \alpha_j \overline{\beta_k} \langle e_j, e_k \rangle$$
$$= \sum \alpha_j \overline{\beta_j}.$$