§5. Phasenkurven

Gemeinsame Sprechweise bei

(H) $\quad \dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\mathbb{R}^n$ Phasenraum von (H)
$t \longmapsto \underline{\varphi}(t)$ (Lösungen) Phasenkurven
Trajektorien im Phasenraum

$\underline{\varphi}(t;\tau,\underline{\xi}) = \exp(t-\tau)A \cdot \underline{\xi}$
allgemeine Lösung von (H)

Für festes t ist

$$x \longmapsto \underline{\varphi}(t;0,x) = e^{tA}\cdot x = g_t(x)$$

eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Die Familie g_t, $t\in\mathbb{R}$, Phasenfluß.
Ist x gegeben, so „wandert" $x \mapsto g_t(x)$ auf einer Trajektorie.

Man hat

$$g_{t+s} = g_t \circ g_s \qquad \text{(aus Exp Plat)}$$

Tangentialvektor an Phasenkurve:
$t \mapsto \underline{\varphi}(t)$ ist $\underline{\varphi}'(t) = A\underline{\varphi}(t)$.

D.h. A definiert das Vektorfeld

$$\varphi \mapsto A\varphi,$$

die Phasenkurven laufen immer tangential

(2) Phasenbilder im Falle $n=2$.

(A) $\dot{\varphi} = A\varphi$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbb{R}$

$\underline{\varphi}(t) \equiv 0$ eine Trajektorie

Def. $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ [Phasenraum] Gleichgewichtslage von (A)

Bemerkung. $B = S^{-1} A S$ $\leadsto$ Trajektorien von (B) Bilder von (A) unter der Affinität S. Damit kann man A in „Normalform" annehmen.

I. A reell diagonalisierbar $\sim$ reelle Diag.matrix
II A komplex diag $\sim$ nichtreellen Diag.matrix
III A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ $\sim$
Ewerte A sind reell
$$\sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Fall III nicht generisch, i.e. kleine Änderungen von $A \to$ I, II. Wird nicht behandelt.

Im Fall II stelle ich eine reelle Normalform her:

EWe: $\lambda = a+ib$, $\bar{\lambda} = a-ib$ $\qquad \cancel{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \sim A}$ in A

h EV zu λ

$\bar{h}$ EV zu $\bar{\lambda}$ $\quad \Rightarrow \quad AH = H\Lambda$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

Nun sei $\quad h = h_1 + i h_2 \qquad h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2$

Also

$$A \left(h_1 + i h_2 \quad h_1 - i h_2 \right) =$$
$$= \left((a+ib)(h_1 + i h_2) \quad (a-ib)(h_1 - i h_2) \right)$$

$$\Rightarrow \quad A h_1 = a h_1 - b h_2$$
$$A h_2 = b h_1 + a h_2$$

Wähle h_1, h_2 als neue Basis im $\mathbb{R}^2$, dann wird Abb $x \mapsto Ax$ durch

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

gegeben, m.a.W. $\exists\, S \in GL(2, \mathbb{R})$ mit

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

<u>Fall I</u>

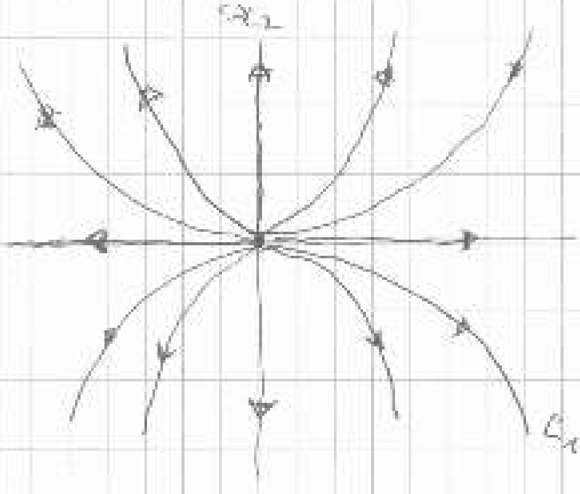
I'	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
Ia	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	
Ib	$0 = \lambda_1 < \lambda_2$	
Ic	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	
Id	$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$	
Ie	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	

Die Fälle I' Ib Id nicht generisch, werden nicht behandelt.

Ia $\quad \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \qquad x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

$\qquad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$

x_2



t: $-\infty$ bis ∞

$c_1 = 0 \quad c_2 > 0$ pos. x_2-Achse

$\qquad\quad c_2 < 0$ neg.

x_1

analog $c_2 = 0$, $c_1 \gtrless 0$

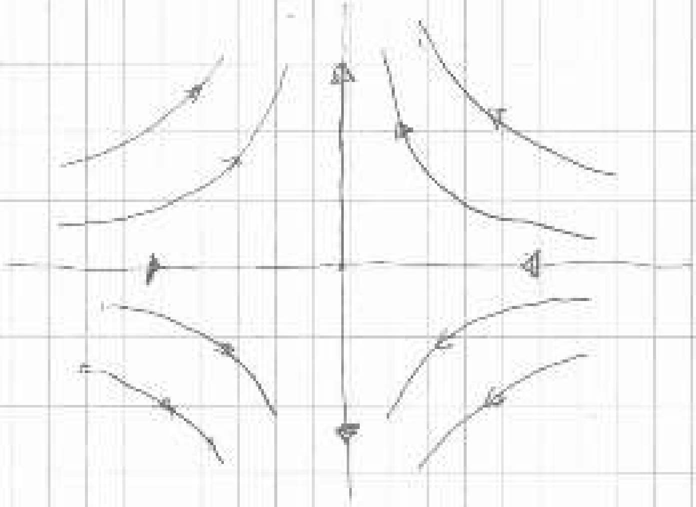
$c_1 > 0$, $c_2 > 0$

„instabiler Knoten"

Ie dasselbe Bild mit umgekehrten Pfeilen: „stabiler Knoten"

Ic $\quad x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \qquad \lambda_1 < 0$

$\qquad x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \lambda_2 > 0$



Sattelpunkt

$c_1 = 0$ pos x_2-Achse
$c_2 \gtrless 0$ neg

$c_1 \gtrless 0$ pos x_1-Achse
$c_2 = 0$ neg

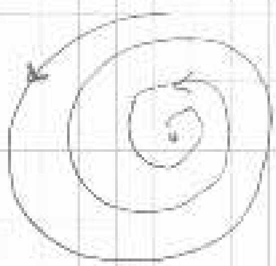
$c_1, c_2 > 0$ hyperbelähnliche Kurven

Fall II
$$\dot{x}_1 = a x_1 - b x_2$$
$$\dot{x}_2 = b x_1 + a x_2$$

$a + ib = \lambda$ $\qquad x_1 + i x_2 = z$

$$\dot{z} = \lambda z$$
$$z(t) = c\, e^{\lambda t} \quad \text{als Bahn in } \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

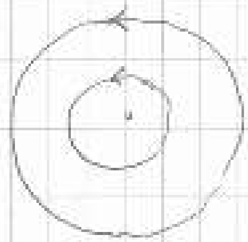
$a < 0$ $\qquad z(t) = c\, e^{at} e^{ibt}$



stabiler Strudel

$a > 0$ Umkehrung der Pfeile: instabiler Strudel

$a = 0$ (nicht generisch)



Wirbel

③ Beispiel: Schwingungsgleichung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = t^2 + 2\beta t + \omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Fall 1: 2 getrennte Nullstellen, $\beta > \omega_0$.
$\leadsto$ Fall Ic, „stabiler Knoten"

Fall 2: 2 getrennte Nullstellen, $\beta < \omega_0$
(aber > 0)
$\leadsto$ Fall II ($a < 0$): stabiler Strudel

Das sind die generischen Fälle