§4. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

① $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\dot{\varphi} = A\varphi \ (+b) \qquad (H),\ (I)$$

lineares System mit konstanten Koeff.

Satz 1 Die Lösungen von (H) bilden $\mathbb{R}$-VR, je 2 Lsgen von (I) unterscheiden sich um ein Element von H.

Satz 2 Ist φ Lsg von H mit $\varphi(t_0)=0$, so ist $\varphi(t)\equiv 0$.

Folgerung: $\dim H \le n$

Beweis von Satz 2 (cf auch §1):

$$\dot{\varphi}(t) = A\,\varphi(t) \quad \rightsquigarrow$$

$$|\dot{\varphi}(t)| \le |A|\,|\varphi(t)|.$$

Sei $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t_1) = 0$, $\varepsilon > 0$,

$$I_\varepsilon = [t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon].$$

$t_2 \in I_\varepsilon$ mit $M = |\varphi(t_2)|$ maximal

$$\underline{\varphi}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underline{\varphi}}(t)\,dt$$

$$M = |\varphi(t_2)| \le |t_1 - t_2| \max_{t\in I_\ell} |\dot\varphi(t)|$$

$$\le |t_1 - t_2| \max_{t\in I} |A|\,|\underline{\varphi}(t_2)|$$

$$\le |t_1 - t_2|\,|A|\cdot M$$

$$\le |A|\,\ell M$$

Wähle $\ell < \frac{1}{|A|}$ $\leadsto$ $M = 0$.

Damit $\{\varphi = 0\}$ offen. Abgeschlossen sowieso $\leadsto$ $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis der Folgerung. $\underline{\varphi}_1, \ldots, \underline{\varphi}_{n+1} \in H$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Wähle $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu \underline{\varphi}_\nu(t_0) = 0$$

$\leadsto$ $\sum c_\nu \underline{\varphi}_\nu(t) \equiv 0$ nach Satz 32

② Satz 3 Sei

$$\Phi = (\underline{\varphi}_1 \ldots \underline{\varphi}_n) = \exp tA$$

Dann ist $\underline{\varphi}_1, \ldots, \underline{\varphi}_n$ Basis des Lösungsraumes H.

Beweis $\frac{d}{dt}\exp tA = A\exp tA$.

Außerdem ist $\exp tA$ nichtsingulär
$\Rightarrow$ Behauptung

Def 1 Φ Fundamentalmatrix $\Leftrightarrow$
$\Phi = (\underline{\varphi}_1 \dots \underline{\varphi}_n)$ Basis.

Satz 4 AWP mit (t_0, η_0) gelöst durch

$$\underline{\varphi} = e^{(t-t_0)A}\eta_0.$$

Denn $\underline{\varphi}(t_0) = \exp 0 \cdot \eta_0 = E\eta_0$
und

$$\dot{\varphi}(t) = Ae^{(t-t_0)A}\eta_0 = A\underline{\varphi}$$

Satz 5 Φ eine Fundamentalmatrix
$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär $\Rightarrow$
ΦC ebenfalls Fund.matrix.
Das liefert alle Fund.matrizen

(B) Bemerkung. Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\eta} = A\eta + \underline{b}(t)$$

geschieht mittels „Variation der Konstanten":
dabei sei eine Fund.matrix Φ
des homogenen Systems bekannt.
$\rightarrow$ Übg!

Beweis von Satz 5.

$$\Psi = \Phi \cdot C, \quad \Psi = (\underline{\psi}_1 \ldots \underline{\psi}_n),$$
$$C = (c_{\kappa\lambda}) \quad \Phi = (\underline{\varphi}_1 \ldots \underline{\varphi}_n)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\psi}_\nu$ Lin komb der $\underline{\varphi}_\mu$ mit Koeff aus den $c_{\kappa\lambda}$, also Lösungen von (H). Wegen $\det C \neq 0$ ist

$$\det \Psi = \det \Phi \cdot \det C \neq 0,$$

also Ψ Fundmatrix. – Umkehrung entsprechend

③ Berechnung einer Fundmatrix.

$$\exp tA$$

ist i.a. schwer zu berechnen. Nun sei

$$S \in Gl(n, \mathbb{R}),$$

$$A^* = S^{-1} A S.$$

$$\Rightarrow \exp tA^* = S^{-1} \exp tA \cdot S$$
$$S \exp tA^* = \exp tA \cdot S$$

Damit: $S \exp tA^*$ auch eine Fundmatrix. Wähle also S geeignet!

Annahme, A sei diagonalisierbar.
Also: $\exists\, S \in Gl(n, \mathbb{R})$ mit

$$S^{-1} A S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A^*$$

Die λ_ν sind die EWe von A, die v_ν:

$$S = (v_1 \ldots v_n)$$

zugehörige EVen. Es folgt

$$S \exp tA^* = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$
$$= (v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t})$$

(alles Spaltenvektoren)

<u>Satz 6</u>. Wenn A diagonalisierbar, dann hat (H) eine Fundamentalmatrix der Gestalt

$$(v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t}),$$

λ_ν EWe von A, v_ν EVen.
Vorsicht $\rightsquigarrow$ komplexe Fund.-matrix!
(4) A nicht diagonalisierbar $\rightsquigarrow$ Jordansche Normalform verwenden.
s. Literatur

(5) Nullstellen der Schwingungsgleichung

$$x_0' = x_1$$
$$x_1' = -\omega_0^2 x_0 - 2\beta x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix}$$

EWe Nst von

$$\chi_A(t) = t^2 + 2\beta t + \omega_0^2$$

a) getrennte reelle Nst $\Leftrightarrow \beta^2 > \omega_0^2$

EWe

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

EVen $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

Fund Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 e^{t\lambda_1} & \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}$$

b) getrennte nichtreelle Nullstellen $\Leftrightarrow \beta^2 < \omega_0^2$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Fund Matrix wie oben. $\rightarrow$ Übergang zu Re, Im-Teil

c) gleiche (reelle) Nullstellen $\Leftrightarrow \omega_0^2 = \beta^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & -2\beta \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar! Ich zerlege

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -\beta^2 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$= D + N$$

Nehme: $DN = ND$, $N^2 = 0$

Damit als Fund. System

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$$

$$= e^{-t\beta} \left[E + tN \right]$$

Zurück zur 2. Gleichung: es ist x_0 eine Lösung, d.e. F.S. von Lösungen der Schwingungsgleichung

$$x_0 = e^{-t\beta}(1 + t\beta)$$

und

$$x_0 = t e^{-t\beta}$$

einfacher: $x_0 = e^{-t\beta}$, $x_0 = t e^{-t\beta}$