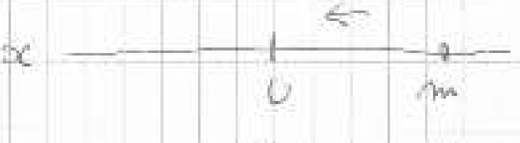
Kap II. Lineare Differentialgleichungen

§1. Die Schwingungsgleichung

(a) Physikalische Beispiele

mechanisch: Massenpunkt an Feder, die in die Nullage rücktreibende Kraft ~ Entfernung von O: $k > 0$.



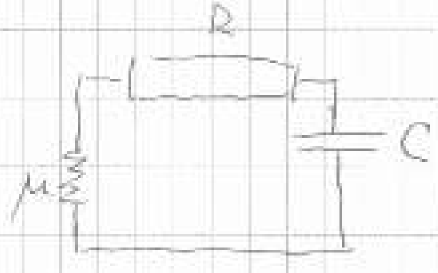
$$m\ddot{x} = -kx$$

Reibung sei ~ Geschwindigkeit. ⇝

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + kx = 0 \qquad (H)$$

weitere Beispiele: Pendel bei kleinen Ausschlägen, Schwingungen einer Magnetnadel, Molekülschwingungen in einfachen Modellen

elektrisch Schwingkreis



U Spannung
J Stromstärke
Q Ladung

Informationen:
$$CU = Q$$
$$J = -\dot{Q} = -C\dot{U}$$
$$RJ = U - \mu\dot{J}$$

$$\curvearrowright \quad -RC\dot{u} = u + \mu C\ddot{u}$$

$$\mu C\ddot{u} + RC\dot{u} + u = 0 \qquad (H)$$

① Mathematische Behandlung

$$\begin{array}{l} (H) \\ (I) \end{array} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases} \quad \text{auf } \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}}$$

heißt Schwingungsgleichung $\beta \geq 0 \quad \omega_0 > 0$

Def 1 Lösg von (H) (I) mit Anf. bedingungen $t_0, x_0, \dot{x}_0$ ist e. 2× stetig diffbar Fkt φ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases}$$

und $\varphi(t_0) = x_0$, $\dot{\varphi}(t_0) = \dot{x}_0$

② Satz 1 Lösgen von (H) 2-dim $\mathbb{R}$-VR, die Differenz Lösgen von (I) Lösg von (H). Zu jedem $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ existiert genau eine Lösung mit diesen Anf bedgen

Beweis. 1) H die Lösungsmenge. $0 \in H$, $(\varphi(t) \equiv 0)$, VR-Eigenschaften klar.

2) $H \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\varphi \longmapsto (\varphi(t_0) \ \ \dot\varphi(t_0))$, t_0 fest.

linear. Zeige: injektiv.

MaW: Z.z. $\varphi \in H$, $\varphi(t_0) = \dot\varphi(t_0) = 0 \rightsquigarrow \varphi \equiv 0$.

Bilde $E(t) = \dot\varphi(t)^2 + \omega_0^2 \varphi(t)^2$,

Differenziere nach t:

$$\frac{d}{dt} E(t) = 2\dot\varphi\ddot\varphi + 2\omega_0^2 \varphi\dot\varphi$$
$$= 2\dot\varphi(\ddot\varphi + \omega_0^2\varphi)$$
$$= -4\beta\dot\varphi^2$$

$$|\dot E(t)| = 4\beta\dot\varphi^2 \leq 4\beta(\dot\varphi^2 + \omega_0^2\varphi^2(t))$$
$$= 4\beta E(t)$$

Nun ist $E(t_0) = 0$. Sei $J = [t_0 - \ell, t_0 + \ell]$, ein $t_1 \in J$ ein Maximum für $E(t)$.

$$E(t_1) = \left|\int_{t_0}^{t_1} \dot E(t)\, dt\right|$$
$$\leq \left|\int_{t_0}^{t_1} |\dot E(t)|\, dt\right|$$
$$\leq 4\beta \left|\int_{t_0}^{t_1} E(t)\, dt\right|$$

$$\leq 4\beta l \, E(t_1)$$

Wähle also l: $4\beta l < 1$. $\rightsquigarrow$

$$E(t_1) \leq \underbrace{4\beta l}_{<1} \cdot E(t_1) \rightsquigarrow E(t_1) = 0$$

also $\varphi(t) \equiv 0$ auf J_l. Das geht
in jedem Punkt t_0' mit $\varphi(t_0') = \dot\varphi(t_0') = 0$,
d unabh. von diesem Punkt $\rightsquigarrow$ $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$

Damit: $\dim H \leq 2$.

2) $\dim H \geq 2$ und Rest aus dem
nächsten Satz.

Lösung von (H). Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Bedingung für λ:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Fall 1 $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ $\Rightarrow$ $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ lösen

Fall 2 < 0 Dann

$$e^{-\beta t} \quad e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

zwei über $\mathbb{C}$ lin unabh. Lösgn.
Real und Imaginärteil

$e^{-\beta t} \cos \omega t$ $\quad$ $e^{-\beta t} \sin \omega t$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ $\quad$ Basis

Fall 3 $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$ $\Rightarrow$ $e^{-\beta t}, t e^{-\beta t}$ Basis

Satz 2 Die obigen Fktn spannen H auf

Bemerkung Für jede Basis gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot\varphi_1 & \dot\varphi_2 \end{pmatrix} = W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0 \text{ überall.}$$

Sonst in t_0:

$$\begin{matrix} \varphi_1(t_0) \\ \dot\varphi_1(t_0) \end{matrix} = a \begin{matrix} \varphi_2(t_0) \\ \dot\varphi_2(t_0) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $a\varphi_2$ löst dasselbe AWP wie φ_1

$\Rightarrow$ $a\varphi_2 = \varphi_1$.

③ Nun zu (I). Lösung durch „Variation der Konstanten"

φ_1, φ_2 Basis von Lt. Sehe

$$\varphi(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t), \quad c_1, c_2 \text{ zu bestimmen!}$$

$$\dot\varphi = \dot c_1 \varphi_1 + c_1 \dot\varphi_1 + \dot c_2 \varphi_2 + c_2 \dot\varphi_2$$

Bestimme c_1, c_2 so, daß

$$(1) \quad \dot c_1 \varphi_1 + \dot c_2 \varphi_2 \equiv 0.$$ Berechne

$$\ddot\varphi = \dot c_1 \dot\varphi_1 + \dot c_2 \dot\varphi_2 + c_1 \ddot\varphi_1 + c_2 \ddot\varphi_2$$

Verlange weiter

$$(2) \quad \dot c_1 \dot\varphi_1 + \dot c_2 \dot\varphi_2 = f(t)$$

(1)(2) eindeutig lösbar wegen $W(t) \neq 0$, s.o.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow: \ \ddot\varphi + 2\beta\dot\varphi + \omega_0^2\varphi &= f(t) + c_1\ddot\varphi_1 + c_2\ddot\varphi_2 \\ &\quad + 2\beta(c_2\dot\varphi_2 + c_1\dot\varphi_1) \\ &\quad + \omega_0^2(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) \\ &= 0 + 0 + f(t) \end{aligned}$$

<u>Satz</u>. (I) durch „Variation der Konstanten" lösbar

④ Sonderfall: $f(t) = c\,e^{i\omega t}$

Ansatz $\varphi(t) = \sigma\, e^{i\omega t}$, σ zu bestimmen
$\dot\varphi(t) = i\omega\sigma\, e^{i\omega t}$
$\ddot\varphi(t) = -\omega^2\sigma\, e^{i\omega t}$

$$\ddot\varphi + 2\beta\dot\varphi + \omega_0^2\varphi = c\,e^{i\omega t}$$
$$(-\omega^2\sigma + 2\beta i\omega\sigma + \omega_0^2\sigma)\,e^{i\omega t} = c\,e^{i\omega t}$$

$$\sigma = \frac{c}{2\beta i\omega + (\omega_0^2-\omega^2)}$$
$$= c\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2) - 2\beta i\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$
$$= c\,\alpha\, e^{-i\omega\delta}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$\operatorname{tg}\omega\delta = 2\beta\omega \Big/ \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\cancel{\omega}^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \varphi = c\,\alpha\, e^{i\omega(t-\delta)}$$

Interpretation: Resonanz + Phasenverschiebung