§2. Die Flächen zweiter Ordnung

① Lineare Flln ⇝ Sattelfläche. Allgemein untersuche Hyperflächen 2-ter Ordnung im $\mathbb{R}^n$ (Quadriken). $n=2$ Kegelschnitte (Schulstoff) $n=3$ Flächen 2-ter Ordnung.

$\mathbb{R}^n \ni \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots, \mathfrak{a}, \underline{b}, \mathfrak{c}, \dots$

② Def 1 $Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$ ein quadratisches Polynom. Die Menge

$$V = V(Q) = \{ \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n : Q(\mathfrak{x}) = 0 \}$$

heißt Quadrik (Hyperfläche 2-ter Ordnung).

Bemerkungen: 1) $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ kann als symmetrische Matrix angenommen werden. Denn: $(n=2)$

$$a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \dots$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2 \underbrace{\frac{a_{12}+a_{21}}{2}}_{a'_{12} = a'_{21}} x_1 x_2 + \dots$$

2) Matrizenschreibweise

$$Q(\mathfrak{x}) = {}^t\mathfrak{x} A \mathfrak{x} + {}^t\underline{b}\, \mathfrak{x} + c$$

Frage: „Vereinfache" Q durch Einführung neuer Koordinaten.

Def 2 i) V K-VR. $\beta: V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform $\Leftrightarrow$ ...

ii) $q(x) = \beta(x, x)$ zugeordnete quadratische Form

iii) $K = \mathbb{R}$. β positiv definit $\Leftrightarrow$ $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

Zshg mit Matrizen (über K): β symm Bilform $a_1, \dots, a_n$ Basis von V (n-dimensional).

$$a_{ij} = \beta(a_i, a_j)$$

symmetrische Matrix A.

Jedes $a \in V$:
$$a = \sum x_i a_i \qquad x \text{ Koo Vektor}$$
$$\underline{b} = \sum y_i a_i \qquad y$$

$$\beta(a, \underline{b}) = \sum x_i a_{ij} y_j = {}^t x A y.$$

a'_i weitere Basis, also

$$a'_i = \sum s_{ji} a_j.$$

$$\Rightarrow \beta(a'_i, a'_j) = \sum_{k,l} s_{ki} a_{kl} s_{lj}$$

$$A' = {}^t S A S,$$

$S = (s_{ji})$ Matrix des Basiswechsels.

3) Also: β liefert symm Matrix bez. Basis
Basiswechsel $\rightsquigarrow$ neue Matrix

$$A' = {}^tSAS.$$

Durch A (und die Basis) ist β bestimmt

4) Ist A die Matrix (bez. Basis) von β, so ist

$$q(x) = {}^tx A x \quad , \quad x \text{ Koo Vektor}$$

(3) Problem: Gegeben β. Gibt es eine Basis, so daß die Matrix von β Diagonalgestalt hat. Anders: Gibt es zu einer symm Matrix A invertierbare Matrix S mit

$${}^tSAS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \; ?$$

Wir wählen $K = \mathbb{R}$. Es gilt viel mehr!

Sei $\langle \, , \rangle$ eukl Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, also
$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$$
pos def Bil form

<u>Satz</u> 1 (Spektralsatz) Es gibt ONB x_i, so daß
$$\beta(x_i, x_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

Die λ_i sind bis auf die Reihenfolge durch β eindeutig bestimmt: es sind die EWe von

$$A = \beta(a_i, a_j), \quad a_i \text{ ONB}.$$

MaW: $\exists$ orthogonale Matrix S mit

$$^tSAS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad \text{II}$$

Wie bestimmt man S, wenn die λ_i bekannt sind? Die EVen von A sind zu bestimmen!

o) Alle EWe sind reell. Denn: Sei $\langle\, , \rangle$ Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$, also

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i \overline{y_i}.$$

Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $= (a_{ij})$
sei $^t\overline{A} = (b_{ij})$: $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Rechne nach

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^t\overline{A}y\rangle.$$

Nun sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A, symm reelle

$\langle A\varphi, \varphi\rangle = \langle \lambda\varphi, \varphi\rangle = \lambda \|\varphi\|^2$, φ EV von A

$\langle \varphi, {}^t\bar{A}\varphi\rangle = \langle \varphi, \lambda\varphi\rangle = \bar{\lambda}\,\|\varphi\|^2$ denn ${}^t\bar{A} = A$

$\rightsquigarrow \lambda = \bar{\lambda}$, d.h. λ reell

1) EVen zu verschiedenen EW sind orthogonal.
Denn: $\underline{a}$, $\underline{b}$ EVen zu $\lambda \neq \mu$.

$$\langle A\underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle \underline{a}, A\underline{b}\rangle$$

$$\lambda\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle \qquad \mu\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle$$

2) taucht EW λ genau k mal auf, so ex k linear unabh EVen zu λ. Orthonormalisiere das System!

3) S als Matrix von EV, (ONS von EVen), bestimmt. $\rightsquigarrow$ $S^{-1} = {}^tS$ und

$$AS = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
$${}^tSAS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Zu lösen homogene lin Gleichungssysteme + Orthonormalisierung

4) Die λ_i nichtlin alg Gleichung, Nullstellen von

$$f(t) = \det(A - tE).$$

„char Polynom"

Wir wollen aber viel weniger: nur die Vorzeichen der EWe sind von Interesse $+, -, 0$. Es gilt

(4) <u>Satz</u> 2 (Sylvestersches Trägheitssatz) Es sei V ein n-dim $\mathbb{R}$-VR, β eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann existiert eine orthogonale (bez. β) direkte Zerlegung

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$$

mit:
1) β pos definit auf $V^+ \times V^+$
2) β neg " " $V^- \times V^-$
3) $\beta \equiv 0$ auf $V^0 \times V^0$

Die Zahlen
$$d^+ = \dim V^+$$
$$d^- = \dim V^-$$
$$d^0 = \dim V^0$$
sind durch β eindeutig bestimmt.

<u>Def</u> 3
$$\left.\begin{aligned} d^+ + d^- &= r = \text{Rang} \\ d^- &= \text{Index} \\ (d_+, d_-) &= \text{Signatur} \end{aligned}\right\} \text{von } \beta$$

Wähle nun Basen

$$\left.\begin{matrix} e_1^+, \dots, e_{d^+}^+ \\ e_1^-, \dots, e_{d^-}^- \end{matrix}\right\} \text{ orthonormal in } \left\{\begin{matrix} V^+ \\ V^- \end{matrix}\right\} \text{ für } \left\{\begin{matrix} \beta \\ -\beta \end{matrix}\right.$$

$e_1^0, \dots, e_{d_0}^0$ beliebig in V^0

$\leadsto$ Matrix von β bez. dieser Basen:

$$\beta(e_i, e_j) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{d_+}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{d_-}, \underbrace{0,\dots,0}_{d_0})$$

Also: Ist β bez. eine Basis von V durch A gegeben, so existiert $S \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$^tS\,A\,S = \mathrm{diag}(1,\dots,-1,\dots,0,\dots)$$

⑤ S sollte leichter zu finden sein als im Spektralsatz der orthogonale Matrix. In der Tat ein elementares Problem! Im einzelnen: die quadr. Form

$$Q(x) = {}^tx\,A\,x$$

soll in neuen Koordinaten in eine Summe von Quadraten zerfallen.

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

Fall 1. $A = 0$ fertig

Fall 2. $A \neq 0$

1. Schritt: a) $a_{ii} \neq 0$ für ein i. Numeriere: $i = 1$.

b) $a_{ii} = 0$ für alle i

Umnumerierung: $a_{12} \neq 0$

$Q(\varphi) = 2a_{12}x_1x_2 + \dots$, wobei in $\dots$ kein Term x_1x_2 auftaucht.

Setze $x_1 = u_1 + u_2 \qquad x_2 = u_1 - u_2$

$x_j = u_j \qquad j > 2$

$$Q(u) = (u_1^2 - u_2^2)2a_{12} + \dots ,$$

wobei in $\dots$ kein Term u_1^2 auftaucht: also $Q(u)$ von der Form a).

<u>2. Schritt</u>. $Q(\varphi) = a_{11}x_1^2 + \dots$

Wähle $\lambda > 0$ mit $a_{11}\lambda^2 = \pm 1$, setze
$x_1 = \lambda u_1 \qquad x_j = u_j$ sonst

$$\rightsquigarrow \quad Q(u) = \pm x_1^2 + \dots$$

<u>3. Schritt</u> Nimm also

$$Q(\varphi) = \pm x_1^2 + \dots$$

an, setze $\varphi = (x_1 \ \varphi')$ (Zeilenvektor)
also
$$Q(\varphi) = \pm x_1^2 + 2\sum_{j>1} a_{1j}x_1x_j + Q'(\varphi'),$$
Q' quadr. Form in $x_2, \dots, x_n$

Setze $x_1 = u_1 + \sum_{k=2}^{n} b_k u_k$, $x_j = u_j$ sonst

$$Q(\vec{u}) = \pm \left(u_1 + \sum_{k=2}^{n} b_k u_k\right)^2$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{n} \left(u_1 + \sum b_k u_k\right) a_{1j} u_j + Q'(\vec{u}')$$

($j \leftrightarrow k$ umbenannt)

$$= \pm \left(u_1^2 + 2u_1 \sum_{j=2}^{n} b_j u_j + \left(\sum_{j=2} b_j u_j\right)^2\right)$$

$$+ 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} u_1 u_j + 2 \sum_{j,k} \ldots + Q'(\vec{u}')$$

Wähle b_j so, daß

$$\pm b_j + a_{1j} = 0 \quad , \quad j = 2 \ldots n$$

Die durch Γ bezeichneten Terme heben sich weg, und es bleibt

$$Q(\vec{u}) = \pm u_1^2 + \tilde{Q}(\vec{u}'),$$

$\tilde{Q}$ quadr Form in $u_2, \ldots, u_n$.

Theorem für $\tilde{Q}$.

⑥ Zurück zu Quadriken

$$V(q) = \{ x : q(x) = 0 \}$$

$$q = Q(x) + \ell(x) + c = {}^t x A x + {}^t b x + c$$

<u>Def</u> 4. Eine Affinität in $\mathbb{R}^n$ ist

$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$\alpha(x) = Lx + a, \quad L \in Gl(n, \mathbb{R})$.

<u>Def</u> 5. Zwei Quadriken äquivalent $\Leftrightarrow$
$\exists$ Affinität α mit $q \circ \alpha = q'$, wobei
$V(q)$, $V(q')$ die Quadriken sind.

„affin äquivalent"

(7) Klassifikation für $n = 3$

I. $rg\, A = 3$

1) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
3) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$
4) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

I 1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 x_2 + 2b_3 x_3 + c$

$$u_1 = x_1 + b_1$$
$$u_2 = x_2 + b_2$$
$$u_3 = x_3 + b_3$$

$$\leadsto \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + C = 0$$

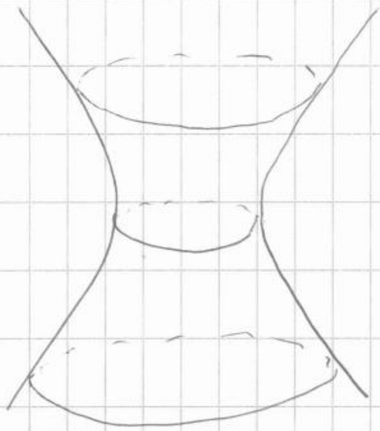
Homothetie: $\varphi = \lambda y$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \begin{cases} 1 & \text{Sphère} \\ 0 & \text{Nullpunkt} \\ -1 & \emptyset \end{cases}$$

I.2. Transformationen wie eben

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

I.2.1. einschaliger Hyperboloid



enthält 2 Geradenscharen

$$(x_1+x_3)(x_1-x_3) = (1+x_2)(1-x_2)$$

1. Schar: $x_1 + x_3 = \lambda(1+x_2)$
$x_1 - x_3 = \frac{1}{\lambda}(1-x_2)$

2. Schar: $x_1 + x_3 = \lambda(1-x_2)$
$x_1 - x_3 = \frac{1}{\lambda}(1+x_2)$

Skizze bei Fladt/Baur

I.2.0. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

(Doppel)Kegel

Mit jedem Punkt $\neq 0$ enthält er eine Gerade durch 0 und diesen Punkt

Bemerkung: Alle Kurven 2ter Ordnung $\equiv$ Schnitte des Kegels mit Ebenen $\equiv$ „Kegelschnitte"

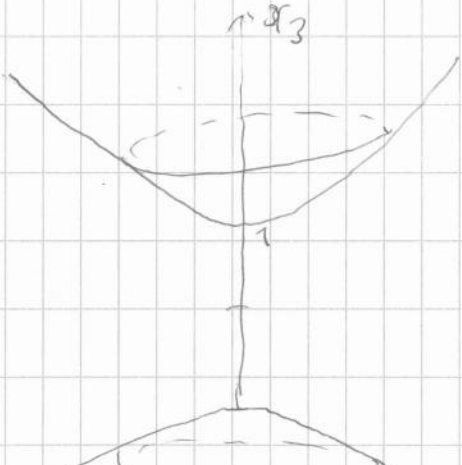
Beispiel: $E: \; x_3 = x_1 + 1$

$\rightsquigarrow \; x_1^2 + x_2^2 = (x_1+1)^2$

$\rightsquigarrow \; x_2^2 = 2x_1 + 1$ Parabel

I.2.-1. $\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$

$\Leftrightarrow \; x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ (I.3)



2-schaliges Hyperboloid

I.3 $\equiv$ I.2.-1

I.4 $\equiv$ I.1

II. rg $A = 2$

1) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$

2) $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$

$\underline{\text{II}}.1 \qquad x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0$

(Translation s.o.) (Umbenennung)

$$x_1^2 + x_2^2 + 2b_3x_3 + c = 0$$

$\underline{\text{II}}.1.1 \qquad b_3 \neq 0$ Trsl i. x_3-Achse

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$$

„Rotationsparaboloid"
(Parabolspiegel)

$\underline{\text{II}}.1.2 \qquad b_3 = 0$ Homothetie

$$x_1^2 + x_2^2 = \begin{cases} +1 & \text{Kreiszylinder} \\ 0 & \text{„Doppelgerade"} \\ -1 & \emptyset \end{cases}$$

$\underline{\text{II}}.2. \quad x_1^2 - x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0$
(Trsl + Umbenennung)

$$x_1^2 - x_2^2 + 2b_3x_3 + c = 0$$

$\underline{\text{II}}.2.1 \qquad b_3 \neq 0$

„hyperbolischer Paraboloid"
„Sattelfläche" s. früher

$\underline{\text{II}}.2.2 \qquad b_3 = 0$

$$x_1^2 - x_2^2 = \begin{cases} +1 & \text{hyperbolischer Zylinder} \\ 0 & \text{Ebenenkreuz} \\ -1 & \text{hyp. Zylinder} \end{cases}$$

III. $\operatorname{rg} A = 1$ (nach Translation)

$$x_1^2 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0$$

nach linearer Trsf in x_2, x_3 allein:

III.1 $\quad x_1^2 + 2x_2 + c = 0$

führt zu

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \qquad \text{parabolischer Zylinder}$$

III.2 $\quad x_1^2 = \begin{cases} 1 & \text{Ebenenpaar} \\ 0 & \text{Doppelebene} \\ -1 & \emptyset \end{cases}$

(8) projektive Klassifikation

$\mathbb{k}$ ein beliebiger Körper, $\mathbb{k}^n$ n-dim affiner Raum, $\mathbb{k}^n_* = \mathbb{k}^n -$ Nullpunkt

Def 6 Der n-dim proj R über k, $P^n\mathbb{k}$ ist $\mathbb{k}^{n+1}_*/\sim$!

$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, \lambda \neq 0, \in k$, mit $y = \lambda x$.

$k \hookrightarrow K$

Ist $p \in P^n k$, so existiert $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}_*$ mit $p = [x]$: Klasse bei $\sim$.

$$p = [x_0, \ldots, x_n] = [x_0 : x_1 : \ldots x_n].$$

„homogene Koordinaten von p"

$P^n k$ kein k-VR

Standardeinbettung $k^n \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{P}^n k$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto [1 : x_1 : \dots : x_n]$$

$k \hookrightarrow K$

$$\operatorname{Im} \iota = \{ [x] : x_0 \neq 0 \}$$
$$\complement \operatorname{Im} \iota = \{ [x] : x_0 = 0 \} \quad \text{„unendlich ferne Hyperebene"}$$
$$\cong \mathbb{P}^{n-1} k$$

Def 7. $P \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogen vom Grad k $:\Leftrightarrow$ $P(\lambda x) = \lambda^k P(x)$ für alle $\lambda \in k$.

Z.B. homogen vom Grad 2:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ k=0}}^{n} x_j x_k \cdot a_{jk}, \qquad a_{jk} \in K.$$

Def 8. P homogen vom Grad k. Die Nullstellenmenge von P, $V(P) \subset \mathbb{P}^n K$, ist

$$V(P) = \{ [x_0 : \dots : x_n] : P(x_0, \dots, x_n) = 0 \}$$

$\deg P = 1 \rightsquigarrow$ Hyperebene
$\deg P = 2 \rightsquigarrow$ projektive Quadrik

Def 9. $Gl(n+1, K)$ operiert auf $\mathbb{P}^n K$ durch

$$A[x] = [Ax].$$

„projektive Transformation"

Entscheidendes Beispiel Q quadr. Pol in $x_1, \dots, x_n$:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c$$

$V(Q) \subset K^n$ (affine) Quadrik

Bilde

$$Q^h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_k b_k x_0 x_k + c x_0^2$$

„Homogenisierung von Q".

Dann ist $V(Q^h) \subset \mathbb{P}^n K$ projektive Quadrik,

$$V(Q^h) \cap \operatorname{Im} \iota = \iota(V(Q)),$$

$V(Q^h)$ entsteht aus $V(Q)$ durch Hinzunahme ∞ ferner Punkte (mit $x_0 = 0$), ist die projektive Abschließung von $V(Q)$.

Beispiel für $n = 2$. Die n.e. affinen Quadriken sind (nicht entarteten)

$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ Kreis

$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ Hyperbel

$x_1^2 - x_2 = 0$ Parabel

Homogenisierungen:

(1) $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 \quad = 0$

(2) $x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 \quad = 0$

(3) $x_1^2 - x_2 x_0 \quad = 0$

Setze in (3) $x_0 = u_0 + u_2 \qquad x_2 = u_0 - u_2 \qquad x_1 = u_1$

(3') $u_1^2 - u_0^2 + u_2^2 = 0$

In allen Fällen dieselben Gleichungen, d.h. es gibt nur einen projektiven n.e. Kegelschnitt.

Def 10. $V(Q)$ und $V(Q')$ proj Quadriken. Äquivalent : $\exists$ proj Trf σ mit:

$$V(Q') = V(Q \circ \sigma).$$

Beispiel: Klassifiziere entsprechend die quadr Fläche projektiv! Übung!

Ergebnis: $\exists$ 3 n.e. proj Flächen, Kugel, Kegel, „Regelfläche" (= Sattelfläche, einschaligen Hyperboloid)

(9) Schulunterricht: affine Klassifikation (für $n = 2$) möglich; proj Klassifikation begrifflich zu schwierig

Literaturhinweise:

(1) v. d. Waerden. Erwachende Wissenschaft
(2) R. Feynman. Was ist ein Naturgesetz
(3) I. Ekeland. Das Vorhersehbare & das Un--.

(1) zur antiken Mathematik
(2) zum Flächensatz
(3) zu den Keplerschen Gesetzen