Einleitung

Verbindung zwischen Schulunterricht und Studieninhalten, d.h. Elementarmathematik und höherer M. Keine Didaktik oder Unterrichtspraxis!

Natürlich nicht für alle Felder ... Leitidee „Linearität": im täglichen Leben, Schulmathematik, höhere Mathematik. Also: Exkurse in Nachbargebiete, Geschichte ...

Vorkenntnisse: Lin Algebra, Analysis in $\mathbb{R}^n$, komplexe Zahlen ... je mehr Vorkenntnisse, desto besser. Also: wenn einzelne Sen nicht verstanden werden, können die Folgesen trotzdem zugänglich sein.

Literatur: Vorläufig Ihre Grundvorlesungen. Weiteres von Fall zu Fall.

Skript: Nein. Evtl eingescannte Notizen
Daher: Notizen selbst machen!

Übungen: Dr B Böhme. Einteilung nächste Woche, Beginn übernächste Woche

Kap 1. Lineare Algebra u. Algebra

§1. Lineare Funktionen

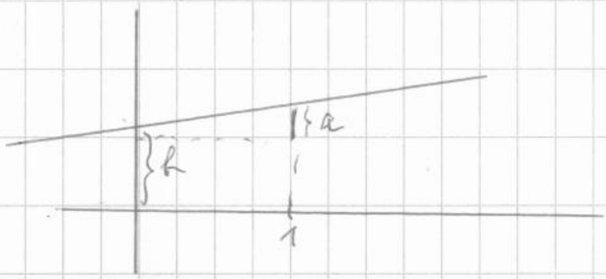
① $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$ (homogen) linear
$y = ax + b$, $b \in \mathbb{R}$ inhomo linear

einfachste Funktionen

Fktalgleichung (homogen): $y = f(x) = ax$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Skizze: Gerade mit Steigung a und Ordinatenabschnitt b:



② Schulunterricht: Bisher Fkten abstrakt betrachtet, treten aber vorher schon auf:

1) Preisfunktionen, Aufwandfunktionen

„Dreisatz": 3 Sack Kartoffeln — 18 €
5 — — ?

D.h. Preisfkt wird linear angenommen:

Preis = a · Menge $a = 18/3$
$y = a \cdot x$

Ein Punkt $\neq (0,0)$ auf der Graden liegt alles fest — alle andern Preise ablesbar.

Didaktische Frage: Wie früh soll beim Ansatz das Funktionsbild auftreten ?

2) Weitere lineare Funktionen

Weg $s = c \cdot t$ Geschw × Zeit
Spanng $U = RI$ Widerstand × Stromstärke
Zins $Z = \frac{p}{100} \cdot K \cdot t$ Zinsformel
„Proportionsrechng"
$$y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2 \iff y_2 : x_2 = y_1 : x_1$$

Aus dem täglichen Leben bekannt, daher:
„es ist logisch, daß ... "

Inhomogene Beispiele: Taxipreise
Früher: Bahnpreis = const · Länge

In Wahrheit: lineare Fktn sehr selten.
Vorteil: einfach!

③ Differentiation als (lokale) Linearisierung

Def 1. f in $U(0)$ definiert.

i) $f(x)$ ist $O(x) \Leftrightarrow \exists C : |f(x)| \leq C|x|$ für $|x|$ klein

ii) $f(x)$ ist $o(x) \Leftrightarrow \exists h$ stetig in 0, $h(0)=0$, mit $f(x) = x\,h(x)$

Folgerungen u. Bezeichnungen 1) $f(x) = O(x)$, $o(x)$

2) $f(x) = o(x) \leadsto \; = O(x)$

3) $f(x) = O(x^2) \leadsto f(x) = o(x)$

Erinnerung

Def 2. f in x_0 diff mit $f'(x_0)$ als Ableitg $\Leftrightarrow$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{lineare Funktion}} + o(x-x_0)$$

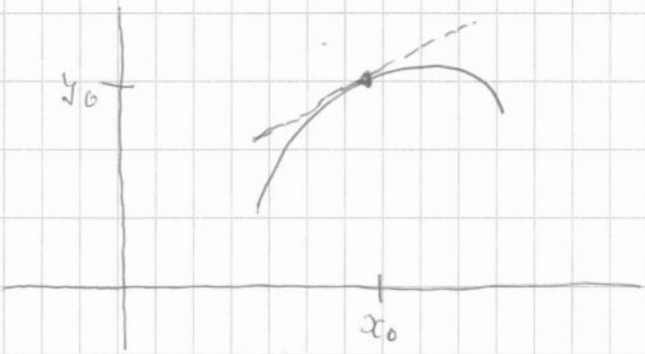
Beachte: die Definition ist quotientenfrei

Beispiel. $f(x) = y = x^2$, $\quad x_0 : y_0 = x_0^2 = f(x_0)$

$$\begin{aligned} y = x^2 &= x_0^2 + x^2 - x_0^2 \\ &= y_0 + (x-x_0)(x+x_0) \\ &= y_0 + (x-x_0)(2x_0 + x - x_0) \\ &= y_0 + 2x_0(x-x_0) + \underbrace{(x-x_0)^2}_{= o(x-x_0)} \end{aligned}$$

cf. Range What is Calculus?

④ geometrische Interpretation: Tangenten an Kurven



Tangente $\quad \ell(x) = y_0 + (x - x_0) f'(x_0)$

$\cancel{f(x) - y_0 \ldots}$

$$(*) \quad f(x) - \ell(x) = o(x - x_0).$$

Hierdurch (*) ist die Gerade $\ell(x)$ eindeutig definiert!

Allgemeiner: Eine Kurve C wird gegeben durch

$$F(x,y) = 0 \qquad F(x_0, y_0) = 0 \qquad {}^{*)}$$

F_x, F_y verschwinden nicht gleichzeitig

Beispiel: $\quad F(x,y) = y - f(x) \qquad (1)$

$\quad F_x = -f'(x) \qquad F_y \equiv 1$

*) i.e. $\{(x,y) : F(x,y) = 0\} = C$

Nimm F als (hinreichend oft) differenzierbar an. Dann (Taylor!)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{F(x_0,y_0)} + (x - x_0) F_x(x_0,y_0) + \\ &\quad + (y - y_0) F_y(x_0,y_0) + \\ &\quad + O(|x - x_0, y - y_0|)^2 \\ &= \ell(x,y) + O(|\ldots|^2) \end{aligned}$$

mit $\ell(x_0,y_0)=0$.

Die Gleichung $\ell(x,y)=0$ ist Gleichung einer Geraden durch (x_0,y_0), die die Kurve „berührt“: Tangente in (x_0,y_0)

Zum Begriff „berührt“

1) Im Fall (1) ist ℓ die Tangente an den Graphen von f, wie früher.

2) Im allgemeinen Fall nehmen wir $F_y \neq 0$ (überall) an. Dann existiert eine Funktion f (hinreichend oft diffbar in $U(x_0)$) mit:

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x).$$

D.h. $C = \{(x, f(x))\}$, i.e. = Graph f.

Aus

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

folgt

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) \equiv 0$$

$$f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

und

$$\ell(x,y) = y - y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

~~ℓ approximiert C nahe~~ $\cancel{(x_0, y_0)}$ ~~:⟺~~

$$\cancel{|(x, f(x)) - (x, \ell(x))| = o(|x - x_0|)}$$

~~(Max Norm)~~

2) Noch im allgemeinen Fall: i) F ist durch C nicht eindeutig bestimmt, kann durch

$$H \cdot F$$

ersetzt werden, mit $H \neq 0$ überall.

ii) Die Geradengleichung ℓ ist durch F eindeutig bestimmt, die Gerade selbst durch C.

⑤ Geometrische Interpretation in n Dimensionen:

Eine Hyperfläche $X \subset \mathbb{R}^n$ gegeben (lokal) durch

$$X = \{ \underset{\sim}{x} : F(\underset{\sim}{x}) = 0 \}, \quad \text{nicht alle} \quad F_{x_j}(\underset{\sim}{x}) = 0 .$$

⇝ F ist durch X bis auf einen Faktor H wie oben bestimmt.

Def 3 $\underset{\sim}{x}_0 \in X$. Dann wird durch

$$(E) \quad \sum \frac{\partial F}{\partial x_j}(\underset{\sim}{x}_0)(x_j - x_j^0) = 0$$

die Tangentialhyperebene E in x_0 an X gegeben.

Für die Approx von X durch E gilt alles obige sinngemäß.

E ist durch X, x_0 eindeutig bestimmt, die Gleichung (E) bis auf skalaren Faktor.

(6) Schon im „Dreisatz" nichtlineare Fkten:

a) 50 Arb mit 3 ~~Monaten~~ Masch in 20 Tagen 1200 m Straße

Wieviel m Straße 40 Arb, 4 Masch, 10 Tage

$$L = a \cdot \underbrace{A \cdot M \cdot Z}_{\text{kubisches Polynom}}$$

b) „antiproportionale" Abhängigkeit („umgekehrter Dreisatz")

Bei 16 € pro Sack bekomme ich 3 Sack K.
Bei 12 € ... wieviel?

(7) $y = ax = f(a,x) \qquad (a,x) \in \mathbb{R}^2$

a fest: $x \longmapsto ax$

$\{x = \text{const}\} \cap \text{Graph} f \quad \equiv$ Gerade
$\{y = \text{const}\} \cap \text{Graph} f \quad \equiv$ Hyperbel

Umbenennung: Die Fläche S:

$$z = xy$$

veranschaulicht alle linearen resp. invers linearen Beziehungen. Fläche 2-ter Ordnung: hyperbolisches Paraboloid.

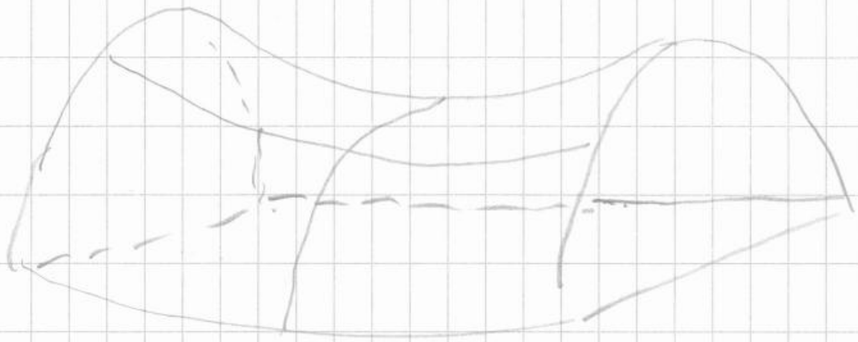
2 Geradenscharen auf S:

1) L_x: $x = \text{const}$ $\quad z = \text{const}\, y$
2) L_y: $y = \text{const}$ $\quad z = \text{const}\, x$

Durch jeden Pkt eine Gerade L_x und eine L_y; je 2 Geraden der selben Schar sind windschief. Niveaulinien $z = \text{const}$ Hyperbeln (resp Geradenpaar)

Koo-Trsf:
$$x = u + v$$
$$y = u - v$$
$$S: z = u^2 - v^2$$

Schnitte mit $u = \text{const}$ bzw $v = \text{const}$ Parabeln



„Sattelfläche“