Kleine AG:
Stacks

Organisatoren: Robert Kucharczyk (robertkucharczyk@web.de)
Timo Schuerg (tschuerg@mathematik.uni-mainz.de)
Pawel Sosna (sosna@math.uni-bonn.de)

am 12.07.2008 in Bonn

Einleitung

Die vielleicht klassischsten Objekte in der algebraischen Geometrie sind Nullstellenmengen von Polynomen in einem affinen oder projektiven Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Der Vorteil dieser Objekte ist, dass sie der geometrischen Intuition zugänglich sind, der Nachteil die restriktive Definition. Eine natürliche Verallgemeinerung stellt der Begriff des Schemas dar, der weder eine Einbettung noch einen Körper verlangt und nicht-abgeschlossene Punkte zulässt. Stacks sind wiederum eine Verallgemeinerung des Begriffs eines Schemas, z.B. können „Punkte" eines Stacks nicht-triviale Automorphismen haben. Nun mag man sich fragen, in welchem Kontext solche Objekte auftauchen können. Im Wesentlichen gibt es zwei Beispiele: Zum einen bei sogenannten Modulproblemen. Dabei fragt man sich, ob eine gewisse Klasse algebraischer Objekte, wie z.B. Vektorbündel oder Garben auf einem projektiven Schema oder die Menge aller Kurven eines festen Geschlechts, eine „schöne" geometrische Struktur besitzt. Abstrakter formuliert betrachtet man einen Funktor, z.B. den Funktor, der einem projektiven Schema über $\mathbb{C}$ alle Vektorbündel auf diesem Schema zuordnet, und fragt sich, ob dieser durch ein Schema dargestellt wird, welches dann *feiner Modulraum* heißt (vergleiche dazu auch die letzte kleine AG). Ist dies der Fall, bekommt man ein „universelles" Objekt, welches im Prinzip das Modulproblem beschreibt. Natürlich existieren feine Modulräume im allgemeinen nicht. Ein Lösungsansatz, der manchmal funktioniert, ist das Problem abzuwandeln und bestimmte Anforderungen an die betrachteten Objekte zu stellen. Ein anderer Ansatz, den wir in dieser Kleinen AG kennenlernen wollen, ist, die Kategorie der Schemata zu verlassen.

Ein anderes wichtiges Beispiel sind Quotienten. Wenn X eine Varietät ist und G eine Gruppe, die auf X wirkt, dann ist der Quotient X/G im allgemeinen keine Varietät, nicht einmal ein Schema. Doch selbst wenn X/G ein Schema ist, kann man leicht Fälle konstruieren, in denen bei der Quotionentenbildung geometrsische Information verloren geht. Man nehme dazu an, dass es in G einen Normalteiler H gibt, so dass $\overline{G} = G/H$ frei auf X wirkt. Dann sind natürlich

X/G und $X/\overline{G}$ isomorph, die Quotientenstacks $[X/G]$ und $[X/\overline{G}]$ sind aber verschieden, weil ersterer sich merkt, dass der Stabilisator jedes Punktes in X genau H ist.
Das Ziel der kleinen AG ist es eine Einführung in die Theorie der (algebraischen) Stacks zu geben. Aufgrund des relativ hohen technischen Aufwands des Themas wollen wir dabei immer die geometrischen Beispiele im Auge behalten.
Jeder Vortrag sollte wie immer 45 Minuten dauern.

Programm

1. Vortrag: Motivierendes Beispiel
In diesem Vortrag soll erklärt werden, warum es keinen feinen Modulraum für elliptische Kurven gibt, mit anderen Worten, warum der Funktor, der jedem Schema S die Menge der Isomorphieklassen elliptischer Kurven $E \to S$ zuordnet, nicht darstellbar ist. Vergleiche dazu [HaMo], Abschnitt 2.A oder [EiHa], Abschnitt VI.2.4. Diskutiere die in ersterem vorgestellten Auswege, vor allem die Level-n-Strukturen (wir beschränken uns dabei auf elliptische Kurven). Erwähne (ohne Beweis) die Darstellbarkeit der Modulfunktoren M_n für elliptische Kurven mit Level-n-Strukturen über geeigneten Basisschemata für $n \geq 3$, vgl. etwa [DeRa, I] oder [Ra]. Erkläre, warum man, um einen Modulraum elliptischer Kurven zu erhalten, eine geeignete Definition des Quotienten von M_n nach der Operation von $GL(2, \mathbb{Z}/(n))$ benötigt.

2. Vortrag: Grothendieck-Topologien
Nun wollen wir den Begriff einer Grothendieck-Topologie auf einer Kategorie sowie den Begriff einer Garbe auf einer solchen Topologie kennenlernen. Dabei beschränken wir uns auf das, was Grothendieck als „Prätopologien“ bezeichnet, da diese anschaulicher und schneller zu definieren sind (die Begriffe sind im Wesentlichen äquivalent). Folge dabei der Darlegung in [Vi, 2.3.1—2.3.3]. Dabei sollte Abschnitt 2.3.2 stark gekürzt werden; es genügt, die Charakterisierungen 2.33.(i) und 2.33.(ii) für fpqc-Morphismen und Propositionen 2.35 und 2.36 (Auswahl) zu zitieren. Da Garben auf Grothendieck-Topologien für uns sehr wichtig sind, sollte hier noch zitiert und diskutiert werden, dass darstellbare Funktoren Garben in der fpqc-Topologie bilden, vergleiche Theorem 2.55. In diesem Zusammenhang wichtig ist auch eine Charakterisierung von darstellbaren Funktoren, siehe [EiHa, Theorem VI-14].

3. Vortrag: Definitionen eines Stacks
Die Referenz für diesen Vortrag ist [Go].
Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in 2-Kategorien. Die Referenz hierfür ist Appendix B. Dabei sollte man eher die Beschreibung mittels Diagrammen verwenden. Nun einen 2-Funktor zwischen 2-Kategorien definieren. Dies kann relativ kurz gehalten werden, wenn man betont, dass diese Objekte im Prinzip (Pseudo-)Funktoren sind. Nun kurz erwähnen wie man aus einer normalen Kategorie eine 2-Kategorie macht (nach Remark 5.3).
Jetzt den Begriff eines Gruppoids einführen (Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind) und die 2-Kategorie der Gruppoide beschreiben, Def. 2.8. Als Beispiele betrachten wir Vektorbündel auf einem Schema (Example 2.7) Nun können wir Stacks als Gruppoid-wertige 2-Funktoren definieren (Def. 2.10). Wenn die Zeit es erlaubt, auf das Diagramm und die Bemerkung nach der Def. 2.10 eingehen (algebraische Räume dabei weglassen). Zudem kann man betonen, dass dieser Begriff die natürliche Verallgemeinerung eines darstellbaren Funktors ist.
Nun wollen wir noch eine alternative Definition eines Stacks präsentieren. Dazu

den Begriff des Kategorie gefasert in Gruppoiden darstellen (Def. 2.11 und 2.12) und an dem Beispiel der stabilen Kurven (Example 2.13) illustrieren. Dann kurz den Zusammenhang zwischen beiden Definitionen beschreiben (Seite 8 unten) und die Definition eines Stacks in dieser Sprache geben (Def. 2.15).

4. Vortrag: Eigenschaften von Stacks
Auch hier ist die Referenz, wenn nicht anders angegeben, [Go].
Zunächst wollen wir verstehen, wie ein Schema einen Stack definiert. Eine gute Referenz hierfür ist der Beginn des fünften Abschnitts in [Vo]. Jetzt einen Morphismus zwischen Stacks, das Faserprodukt und den Begriff der Darstellbarkeit definieren (2.2). Wichtig ist, wie Separiertheit, Surjektivität etc. eines Morphismus von Stacks erklärt werden. Danach erläutern, dass ein Morphismus zwischen Schemata einen Morphismus zwischen den zugeordneten Stacks definiert und umgekehrt (Voight, Abschnitt 6). Wenn die Zeit reicht, Prop. 2.19 anführen.
Nun kommen wir zur Definition eines Deligne-Mumford- und eines Artin-Stacks (2.20, 2.22) und schauen uns dann einige Eigenschaften dieser Objekte an. Zunächst erläutern wir, wie gewisse Eigenschaften von Schemata auf Stacks übertragen werden (Beginn von Abschnitt 2.5). Jetzt (offene) Unterstacks einführen (Def. 2.30 und 2.31) und erwähnen, wie man Irreduzibilität und Separiertheit eines Stacks definiert (Def. 2.32 und 2.33). Nun als Analogie zu Schemata das Bewertungskriterium für Separiertheit erklären (Prop. 2.34). Zum Schluss, falls die Zeit reicht, Garben auf Stacks definieren (Abschnitt 2.7).

5.Vortrag: Stabile Kurven als Deligne-Mumford-Stack
In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass der Stack der stabilen Kurven vom Geschlecht g ein Deligne-Mumford-Stack ist. Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst zeigt man, dass ein quasi-separierter Stack über einem noetherschen Schema mit unverzweigter, darstellbarer Diagonale und einem glatten Atlas ein Deligne-Mumford-Stack ist. (Theorem 2.1 in [Ed]). Als Korollar hieraus erhält man, dass der Quotient eines noetherschen Schemas nach einer Gruppenwirkung mit endlichen reduzierten Standgruppen ein Deligne-Mumford Stack ist (Korollar 2.2 in [Ed]). Um diese Aussage auf den Fall der Kurven anwenden zu können, ist aber noch ein wenig Arbeit nötig. Die dualisierende Garbe liefert für eine Kurve eine Einbettung in einen projektiven Raum. Mit Hilfe von Riemann-Roch kann man das Hilbert-Polynom der eingebetteten Kurve berechnen. Dann benutzt man, dass es im Hilbertschema des projektiven Raums mit dem oben berechneten Hilbert-Polynom ein Unterschema gibt, dass die eingebetten Kurven parametrisiert. Diese Aussage benutzt man am besten einfach, ohne einen Beweis anzugeben. Schließ lich teilt man noch die PGL_n-Wirkung aus dem oben kontstruierten Unterschema heraus, die der Basiswahl entspricht. (Abschnitt 3.1 in [Ed]). Mit Teil 1 des Beweises schließ t man, dass der Stack der stabilen Kurven ein Deligne-Mumford Stack ist.

Literatur

[DeRa] Deligne, P. und Rapoport, M.: *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, in: Modular Functions of One Variable II, Springer LNM 349, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1973

[Ed] Edidin, D.: *Notes on the construction of the moduli spaces of curves*, `arXiv:math/9805101`

[EiHa] Eisenbud, D. und Harris, J.: *The Geometry of Schemes*, Springer GTM 197, Springer-Verlag, New York 2000

[Go] Gomez, T.L.: *Algebraic stacks*, `arXiv:math/9911199v1`

[HaMo] Harris, J. und Morrison, I.: *Moduli of Curves*, Springer GTM 187, Springer-Verlag, New York 1998

[Ra] Rapoport, M.: *Moduli of Elliptic Curves*, Vorlesung im Sommersemester 2008, Bonn (für Mitschrift bitte an Robert wenden)

[Vi] Vistoli, A.: *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in: Fundamental Algebraic Geometry — Grothendieck's FGA Explained, AMS, Providence, RI 2005

[Vo] Voight, J.: *Introduction to algebraic stacks*, zu finden unter `www.cems.uvm.edu/~voight`