Analysis 3

23.10.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 30.10.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: **3 + 2 + 5 = 10 Punkte**

(a) Wir definieren eine Relation auf $\mathbb{R}$ via $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass eine Menge $V \subset [0,1]$ existiert, sodass jede Äquivalenzklasse $[x] \in \mathbb{R}/\sim$ genau einen Repräsentanten $x \in V$ besitzt.

(c) Sei nun $\{q_i\colon \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Zeigen Sie:

(i) Die Mengen $V_i := \{q_i + v\colon\ v \in V\}$ sind paarweise disjunkt.

(ii) Die Menge $V := \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ erfüllt $[0,1] \subset V \subset [-1,2]$.

(iii) Die Menge V ist nicht Lebesgue-messbar. Nehmen Sie hierzu im Hinblick auf einen Widerspruch an, sie wäre es, und schlussfolgern Sie aufgrund der Eigenschaften des Lebesguemaßes, dass dann sowohl $m(V) \in [1,3]$ als auch $m(V) \in \{0, \infty\}$ gelten müssen; dies liefert den gesuchten Widerspruch.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Zeigen Sie: Zu jeder Lebesgue-messbaren Menge A existieren zwei Borel-messbare Mengen B_1, B_2 mit $B_1 \subset A \subset B_2$ und $m(B_2 \setminus B_1) = 0$.

Aufgabe 3: **4 + 3 + 4 = 10 Punkte**

(a) Seien $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^d\colon\ A \text{ oder } \mathbb{R}^d \setminus A \text{ abzählbar}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ wie in Teilaufgabe (a) von $\{\{x\}\colon\ x \in \mathbb{R}^d\}$ erzeugt wird: Das heißt, $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\{\{x\}\colon\ x \in \mathbb{R}^d\}$ enthält.

(c) Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{B \cap A\colon\ A \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra auf B ist.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ zwei metrische Räume und $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus, d.h., f ist bijektiv, stetig mit stetiger Inverser f^{-1}. Seien $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{P}(Y)$ die Borelsche σ-Algebren auf X bzw. Y (bzgl. d_X bzw. d_Y). Zeigen Sie, dass $f(\mathcal{B}(X)) := \{f(A)\colon A \in \mathcal{B}(X)\} = \mathcal{B}(Y)$. Schlussfolgern Sie, dass im $\mathbb{R}^d$ die Translate von Borelmengen wiederum Borelmengen sind: D.h., ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$, so ist $x + A := \{x + a\colon a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.