Analysis 2

09.04.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 19.04.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **8+2 = 10 Punkte**

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge und $|\cdot|\colon X \to \mathbb{R}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für einen gegebenen Punkt $p \in X$ definieren wir eine Abbildung $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{falls}\, x,y \,\text{auf einer Geraden durch}\ p\ \text{liegen} \\ |x-p|+|y-p| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei nennen wir jede Menge der Form $\{a+\lambda b\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$ eine *Gerade*.

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X definiert.

(b) Begründen Sie, warum d oft als (französische) *Eisenbahnmetrik* bezeichnet wird.
Hinweis: Was wäre der Zentralbahnhof?

Aufgabe 2: **4+6 = 10 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Wir nennen (X, d) *beschränkt*, falls $r > 0$ existiert mit $d(x, y) \le r$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt ein $R > 0$ und ein $x \in X$ mit $\mathrm{B}_R(x) \cap X = X$.
(ii) Es gibt ein $R > 0$ mit $\mathrm{B}_R(x) \cap X = X$ für alle $x \in X$.
(iii) (X, d) ist beschränkt.

(b) Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := \frac{|t|}{1+|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $d_f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_f(x, y) := f(d(x, y))$ eine Metrik auf X definiert, und dass (X, d_f) ein beschränkter metrischer Raum ist. Charakterisieren Sie ferner die bezüglich d_f offenen Mengen durch die bezüglich d offenen Mengen und vice versa.

Aufgabe 3: **3+3+4 = 10 Punkte**

Es notiere $\mathbb{R}^{2\times 2}$ den Vektorraum der reellen (2×2)-Matrizen und sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} := (|Ae_1|^2 + |Ae_2|^2)^{\frac{1}{2}},$$

wobei A als bezüglich der Basis $\{e_1, e_2\}$ dargestellt angenommen wird und $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller invertierbaren Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ offen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezüglich der durch $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ induzierten Metrik ist.

(c) Sei nun $G_\alpha := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \colon \det(A) = \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei det die aus der linearen Algebra bekannte Determinante bezeichne. Zeigen Sie, dass jedes G_α bezüglich der durch $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ induzierten Metrik abgeschlossen ist. Wie steht das in Einklang mit Teilaufgabe (b)?

Aufgabe 4: **2+2+2+2+1+1 = 10 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $E, F \subset X$ Teilmengen. Wie in der Vorlesung notieren wir für eine Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A}$ ihren Abschluss, mit A° ihr Inneres und mit ∂A ihren Rand. Zeigen Sie:

(a) $E \subset F \Longrightarrow E^\circ \subset F^\circ$ und $\overline{E} \subset \overline{F}$.

(b) $(E^\circ)^\circ = E^\circ$.

(c) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$ und $\overline{E \cap F} \subset \overline{E} \cap \overline{F}$. Geben Sie ferner ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d) und Teilmengen $E, F \subset X$ an, für welche $\overline{E \cap F} \subsetneq \overline{E} \cap \overline{F}$ gilt.

(d) $(E \cap F)^\circ = E^\circ \cap F^\circ$ und $E^\circ \cup F^\circ \subset (E \cup F)^\circ$. Geben Sie ferner ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d) und Teilmengen $E, F \subset X$ an, für welche $E^\circ \cup F^\circ \subsetneq (E \cup F)^\circ$ gilt.

(e) $\partial E = \partial(X \setminus E)$.

(f) $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$. Geben Sie ferner ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d) und Teilmengen $E, F \subset X$ an, für welche $\partial(E \cup F) \subsetneq \partial E \cup \partial F$ gilt.

Aufgabe 5: **(2+2)+6 = 10 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) (X, d) ist vollständig.

  (ii) Für jede bezüglich d abgeschlossene Teilmenge A von X ist (A, d) ein vollständiger metrischer Raum.

(b) Sind die folgenden metrischen Räume (X, d) vollständig?

- $X = \mathbb{N}$, $d =$ euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$.
- $X = (0, 1)$, $d =$ euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$.
- $X = (0, 1)$, $d =$ diskrete Metrik (vgl. Vorlesung oder Tutorium)
- $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $d =$ durch $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ induzierte Metrik (vgl. Aufgabe 3).

Beweisen Sie Ihre Behauptung.