Prof. Dr. Michael Rapoport
Dr. Ulrich Görtz **SS 2006**

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 6, Vorträge am 01.06.2006

Aufgabe 12

a) Sei X ein Zariski-Raum (d. h. ein noetherscher topologischer Raum, in dem jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge einen eindeutig bestimmten generischen Punkt besitzt). Zeige, dass eine Teilmenge von X genau dann abgeschlossen ist, wenn sie konstruierbar und abgeschlossen unter Spezialisierung ist. Zeige, dass eine Teilmenge von X genau dann offen ist, wenn sie konstruierbar und abgeschlossen unter Generisierung ist.

b) Sei X ein noethersches Schema, $x \in X$ und $y \in \overline{\{x\}}$. Zeige, dass ein diskreter Bewertungsring R und ein Morphismus $\operatorname{Spec} R \longrightarrow X$ existieren, so dass der generische Punkt von $\operatorname{Spec} R$ auf x, und der spezielle Punkt auf y abgebildet wird. (*Hinweis:* Zitiere [EGA] (0_I, 6.5.8).)

c) Folgere aus a) und b) ein "Bewertungskriterium" dafür, dass eine konstruierbare Teilmenge eines noetherschen Schemas abgeschlossen ist.

Aufgabe 13

Sei X ein Schema. Definiere den Begriff eines Vektorbündels auf X, und erkläre die Korrespondenz zwischen Vektorbündeln und lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Rang. Siehe etwa [M] III.2 (Def. 5 usf.); vergleiche auch [EGA II], (1.7.8), (1.7.9) bzw. [H], Ex. II.5.18.

Aufgabe 14

Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $X = \mathsf{Grass}_k(n, r)$ die Grassmann-Varietät der r-dimensionalen Untervektorräume in $V := k^n$. Ist $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, so bezeichne $U_x \subseteq V$ den zugehörigen Unterraum.

Zeige, dass
$$\mathscr{E} = \{(v, x) \in V \times X;\ v \in U_x\}$$
ein Vektorbündel vom Rang r auf X ist—das sogenannte tautologische Bündel.

Beschreibe das zur Plücker-Einbettung gehörige Geradenbündel in Termen von $\mathscr{E}$ und identifiziere $\mathscr{E}$ im Fall $r = 1$.

Literatur

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique I*, Springer 1971.

[EGA II] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique II, Publ. Math. IHES **8** (1961), 5–222.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics.

[M] D. Mumford, *The red book on varieties and schemes*, Springer Lecture Notes in mathematics **1358**, 1988.